

BESCHREIBUNG DER STREUUNG AN HADRONEN MIT HILFE EINER
INTEGRALDARSTELLUNG FÜR DIE OFF-SHELL-VIERPUNKTFUNKTION

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Physik

der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

WILFRIED HECK

aus Marburg

Marburg/Lahn 1977

Druck: Görich & Weiershäuser, Marburg

BESCHREIBUNG DER STREUUNG AN HADRONEN MIT HILFE EINER
INTEGRALDARSTELLUNG FÜR DIE OFF-SHELL-VIERPUNKTFUNKTION

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Physik

der Philipps-Universität Marburg/Lahn



vorgelegt von

WILFRIED HECK

aus Marburg

Marburg/Lahn 1977

Druck: Görich & Weiershäuser, Marburg



vom Fachbereich Physik der Philipps-Universität Marburg/Lahn
als

Dissertation angenommen am :	7. November 1977
Tag der mündlichen Prüfung :	7. November 1977
Berichterstatter :	Prof. Dr. W. Kerler
Mitberichterstatter :	Prof. Dr. R. Weiner

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung.	1
2. Die Darstellung der Vierpunktfunktion	5
3. Eigenschaften der Belegfunktion	8
4. Beschreibung von Hadron-Hadron-Streuung im asymptotischen Bereich mit Hilfe der Nakanishi- Darstellung	22
5. Anwendung der Nakanishi-Darstellung bei der Diskussion des elektromagnetischen Formfaktors eines Hadrons	33
Literaturverzeichnis	42

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Zusammenfassung

Die Erweiterung einfacher Modelle der Streuung an Hadronen durch Verwendung von DGS-Darstellungen für die Vertices führt zu zusätzliche Parameter ein, ohne als Gegenwert eine exakte Darstellung zu liefern. Es wird statt dessen vorgeschlagen, die NAKANISHI-Darstellung für die off-shell Vierpunktfunktion einzuführen. Dann wird es möglich, Streuamplituden in verschiedenen kinematischen Bereichen untereinander und auch mit der off-shell-Vierpunktfunktion im elektromagnetischen Formfaktor zu verknüpfen. In Kapitel 2 wird die in der Literatur bisher noch kaum angewandte NAKANISHI-Darstellung vorgestellt. In Kapitel 3 werden die Eigenschaften der Belegfunktionen durch Analysen der Konstruktion der Integraldarstellung und durch die Berechnung konkreter Beispiele untersucht. Es wird gezeigt, wie die NAKANISHI-Darstellung auch auf den Fall von Teilchen mit Spin ausgedehnt werden kann. Weiter ergibt sich, daß es möglich ist, die subtrahierte Darstellung auf die ursprüngliche NAKANISHI-Form zu bringen. Die Wichtigkeit des Distributionscharakters (der z.B. bei Anwendungen der DGS-Darstellung meist unbeachtet bleibt) stellt sich in allen Fällen heraus. In Kapitel 4 erfolgt die Anwendung auf die phänomenologische Beschreibung der Hadron-Hadron-Streuung im asymptotischen Bereich. Rechenmethoden zur Konstruktion geeigneter Belegfunktionen werden angegeben und diskutiert. Das Potenzverhalten im Weitwinkelfall läßt sich verhältnismäßig einfach beschreiben. Der Ursache der Schwierigkeiten im Reggebereich wird nachgegangen. Es wird gezeigt, daß es eine Klasse von Belegfunktionen gibt, die auch in diesem Fall zum Ziel führt. Kapitel 5 behandelt die Verwendung der NAKANISHI-Darstellung bei der Beschreibung elektromagnetischer Formfaktoren durch die hadronische Vierpunktfunktion. Das Potenzverhalten der asymptotischen Formfaktoren erleichtert die Beschreibung. Der Zusammenhang mit der Integraldarstellung für die Dreipunktfunktion und mit der verbreiteten Dreiecksnäherung wird herausgearbeitet. Die hier vorgeschlagene Anwendung der NAKANISHI-Darstellung und die dafür in den Kapiteln 3, 4 und 5 hergeleiteten Ergebnisse sind neu.

1. Einleitung

Das Bild, daß Hadronen aus Partonen zusammengesetzt sind, hat sich bei tiefinelastischen Lepton-Hadron Reaktionen bewährt [1]. Die Erweiterung der Parton-Modelle auf rein hadronische Prozesse brachte Erfolge bei der Untersuchung von Reaktionen mit großen Impulsüberträgen [2].

Einfache Vorstellungen [3,4,5] führten zu den dimensional Scaling-Gesetzen für die elastische Weitwinkelstreuung bei hohen Energien und für inelastische Prozesse, bei denen Teilchen mit großem Transversalimpuls auftreten. Man erhielt Zusammenhänge zwischen den Reaktionen mit großen Transversalimpulsen, dem asymptotischen Verhalten der elektromagnetischen Formfaktoren und dem Schwellenverhalten der Strukturfunktionen der tiefinelastischen Lepton-Hadron Prozesse. Das Konstituenten-Austausch-Modell (constituent-interchange-model, CIM) [6] diskutiert einen konkreten Mechanismus, der bei der Streuung von Hadronen mit großem Impulsübertrag auf solche Beziehungen führt.

Die Ergebnisse solcher Modellrechnungen sind stark von dem dabei vorausgesetzten off-shell Verhalten der in diesen auftretenden Vertexfunktionen, welche die Aufspaltung der Hadronen in ihre Bestandteile beschreiben, abhängig.

Einen verbesserten Einblick in das Wesen dieser Modelle bietet die Verwendung einer kovarianten Beschreibung der Vertices durch eine entsprechende Integraldarstellung, wie man sie aus der Störungstheorie herleiten kann [7]. Vielfach angewendet wird die DESER-GILBERT-SUDARSHAN (DGS)-Darstellung [8], deren Belegfunktion dann das asymptotische Verhalten der Vertexfunktion bestimmt.

Eigenschaften der Spektralfunktion wurden in einer Vielzahl von feldtheoretischen Modellen diskutiert [9,10,11].

Wenn man nicht von ganz speziellen Annahmen ausgeht, bringt die Möglichkeit, verschiedenartige, jedoch im Rahmen der allgemeinen Eigenschaften zulässige Belegfunktionen für die Integraldarstellungen der Vertexfunktionen anzunehmen, die Freiheit, neue Parameter in die Beschreibung der betrachteten Reaktionen einzuführen [7].

An diesem Punkt stellt sich die Frage, ob es sinnvoll ist, in ein nur beschränkt gültiges Modell wie etwa das CIM, dessen Hauptvorteil doch mit in seiner Einfachheit besteht, noch zusätzliche Parameter einzubringen. Da es gegenwärtig aussichtslos erscheint, solche Parameter aus einer umfassenden Theorie zu erschließen, ist es klar, daß als alleiniges Ziel eine Phänomenologie in Betracht gezogen werden kann.

Wenn man schon vom CIM mit seinen drastischen Annahmen abgeht, ist es angebracht, als Gegenwert für dessen Einfachheit einen allgemeingültigen Rahmen zu gewinnen. Bei der Beschreibung einer exklusiven Streuamplitude sollte man daher eine entsprechende Darstellung sofort für die Vierpunktfunktion selbst verwenden und dort die noch offenen Parameter durch Vergleich mit möglichst vielen Experimenten festlegen. Wesentlich ist, daß man dabei mit einer exakten Darstellung arbeitet.

Eine zu überwindende Schwierigkeit besteht nun darin, daß es notwendig ist, eine Darstellung für die off-shell Vierpunktfunktion zu verwenden, wenn man den Zusammenhang mit dem elastischen Formfaktor oder den vom Weitwinkel- zum Regge-Bereich im Sinne von [12] betrachten will.

Ihre Behandlung ist naturgemäß beträchtlich schwieriger als die einer on-shell Darstellung. Für die Beschreibung steht in diesem Fall nur die in dieser Arbeit verwendete NAKANISHI-Darstellung [13] für die off-shell Vierpunktfunktion zur Verfügung, die außer bei NAKANISHI selbst kaum Anwendung fand. Sie fügt sich ein in den allgemeineren Rahmen der Darstellungen von N-Punktfunktionen. Je nach der Größe von N und der Anzahl

der off-shell-Beine spricht man von KÄLLEN-LEHMANN- [14,15,16, 17], DGS- [8], NAKANISHI- [13] (usw.) Darstellungen. Im Zusammenhang zu sehen, sind Dispersionsrelationen [18], die MANDELSTAM-Darstellung [19] und ähnliche früher diskutierte Darstellungen [20,21]. Die jeweilige Form dieser Darstellungen hat man zum Teil aus der axiomatischen Feldtheorie [8,14,15,16, 17] und im Rahmen der Störungstheorie [13,22,23,24] abgeleitet. Sie gibt nach Konstruktion die richtigen analytischen Eigenschaften der N-Punktfunktionen wieder [25,26,27].

Man stößt nun auf das Problem einer sinnvollen Parametrisierung der Belegfunktionen, da man, solange diese nicht spezifiziert sind, keine weitergehenden Aussagen über die durch sie beschriebenen N-Punktfunktionen (wie etwa über ihr asymptotisches Verhalten) machen kann. Sie im Rahmen einer willkürlich zugrundegelegten Feldtheorie zu berechnen, ist praktisch kaum durchführbar und auch unsinnig, da dann eine direkte Bestimmung der N-Punktfunktion viel schneller zum Ziel führen würde, ganz abgesehen davon, widerspräche dieses Verfahren dem anzustrebenden phänomenologischen Zugang. Um eine geeignete Form der Parametrisierung erst einmal zu finden, ist es jedoch zweckmäßig, sich an einfachen Beispielen Belegfunktionen anzusehen, wie sie sich in einer störungstheoretisch behandelten Feldtheorie ergeben. Weiter ist es notwendig festzustellen, auf welche Weise Belegfunktionen das asymptotische Verhalten bestimmen.

Bei der Untersuchung geeigneter Parametrisierungen tritt als Problem auf, daß die Spektralfunktionen im allgemeinen Distributionen sind. Dieser Umstand wurde bisher bestenfalls in Ansätzen beachtet [5,27]. Bei der Vierpunktfunktion hat man es zudem mit Distributionen von mehreren Variablen zu tun. Die Frage nach dem Testfunktionenraum, auf dem die auftretenden Distributionen definiert sind, wurde bisher nicht gestellt. Nur die formale Verwendung spezieller Distributionen wurde betrachtet.

Bei der Hadron-Hadron-Streuung erweist sich die NAKANISHI-Darstellung als sehr geeignet zur Beschreibung von Streuamplituden im asymptotischen Bereich der Weitwinkelstreuung; da dieser durch Potenzverhalten in den entsprechenden kinematischen Variablen charakterisiert ist, kann man, wie in Abschnitt 4 näher gezeigt wird, verhältnismäßig leicht geeignete Belegfunktionen angeben. Dagegen ergeben sich im Reggebereich gewisse Schwierigkeiten, die mit der Summation unendlich vieler Distributionen zusammenhängen.

In Abschnitt 5 wird gezeigt, daß die betrachteten Darstellungen die Klärung der Zusammenhänge verschiedener Modellvorstellungen und des asymptotischen Verhaltens bei elektromagnetischen Formfaktoren erleichtern.

2. Die Darstellung der Vierpunktfunktion

Die Anwendung der NAKANISHI-Integraldarstellung für die off-shell Vierpunktfunktion setzt zunächst eine genaue Untersuchung ihrer allgemeinen Eigenschaften voraus.

Sie ist ein Spezialfall der aus der Störungstheorie abgeleiteten Darstellung für die N-Punktfunktion [13]

$$f_N(\underline{s}) = \prod_{i=1}^M \int_0^1 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^M z_i) \int_0^\infty d\alpha \frac{\Phi_N(\underline{z}, \alpha)}{\sum_{i=1}^M z_i s_i - \alpha + i\epsilon} \quad (1)$$

$$\underline{s} = \{s_1, \dots, s_M\}, \quad \underline{z} = \{z_1, \dots, z_M\}$$

Die s_i sind die M verschiedenen invarianten Quadrate der Summen der N äußeren Impulse. ($M = 1$ für $N = 2$, $M = 3$ für $N = 3$, $M = 7$ für $N = 4$ und $M = 2^{N-1} - 1$ für $N \geq 5$.)

Für die Zweipunktfunktion folgt die KÄLLÉN-LEHMAN-Darstellung

$$f_2(s) = \int_0^\infty ds' \frac{\Phi_2(s')}{s - s' + i} \quad (2)$$

Weiterhin ist die entsprechende Darstellung der off-shell Vertexfunktion gegeben durch

$$f_3(\underline{s}) = \int_0^1 dz_a \int_0^1 dz_b \int_0^1 dz_c \delta(1 - z_a - z_b - z_c) \int_0^\infty d\alpha \frac{\Phi_3(z_a, z_b, z_c, \alpha)}{z_a s_a + z_b s_b + z_c s_c - \alpha + i\epsilon}$$

$$\text{mit } \underline{s} = \{s_a, s_b, s_c\} = \{p_a^2, p_b^2, p_c^2\} \quad (3)$$

Ist z.B. mit $s_c = m_c^2$ eines der Beine auf der Massenschale, so führen geeignete Substitutionen direkt auf die gebräuchlichen Formen der DGS-Darstellungen [7, 10, 13].

Bei der Vierpunktfunktion sind die Invarianten

$\underline{s} = \{s_j = p_j^2, j = a, b, c, d; s, t, u\}$ bekanntermaßen nicht linear unabhängig.

Die Eliminierung von jeweils einer der Variablen s, t oder u führt zu einer aus drei Teilen bestehenden Darstellung, bei der jeder Teil der Form nach mit der allgemeinen Darstellung über-

einstimmt, die in den Nennern dann jedoch nur noch linear unabhängige Variablen enthält [13]:

$$f_4(s) = \prod_{i \neq u} \int_0^1 dz_i \delta(1 - \sum_{i \neq u} z_i) \int_0^\infty d\alpha \frac{\varphi_{st}(z_a, z_b, z_c, z_d, z_s, z_t, \alpha)}{\sum_{i \neq u} z_i s_i - \alpha + i\epsilon} \quad (4)$$

+ 2 Terme mit s, t, u zykl. vertauscht.

In der ursprünglichen Form der Darstellung entspricht dies einer Aufspaltung der Belegfunktion

$$\varphi_4(z, \alpha) = \delta(z_u) \varphi_{st} + \delta(z_s) \varphi_{tu} + \delta(z_t) \varphi_{su}. \quad (5)$$

Die drei Belegfunktionen φ_{st} , φ_{tu} und φ_{su} sind unabhängig von jeweils z_u , z_s oder z_t .

Die Kurzschreibweise

$$f_4(s) = \int_0^1 \widetilde{dz} \int_0^\infty d\alpha \frac{\varphi_4(z, \alpha)}{(N)} \quad (6)$$

wird ermöglicht durch die Abkürzungen

$$(N) = \sum_i z_i s_i - \alpha + i\epsilon \quad (7)$$

und

$$\int_0^1 \widetilde{dz} = \prod_i \int_0^1 dz_i \delta(1 - \sum_i z_i) \dots$$

Wenn alle vier Beine auf der Massenschale liegen, bringt eine passende Substitution die Darstellung (4) in die folgende Form:

$$\begin{aligned} f_4(s) = & \int_0^1 dz \int_{-\infty}^\infty d\gamma \frac{\rho_{st}(z, \gamma)}{zs + (1-z)t - \gamma + i\epsilon} \\ & + \int_0^1 dz \int_{-\infty}^\infty d\gamma \frac{\rho_{tu}(z, \gamma)}{zt + (1-z)u - \gamma + i\epsilon} \\ & + \int_0^1 dz \int_{-\infty}^\infty d\gamma \frac{\rho_{su}(z, \gamma)}{zu + (1-z)s - \gamma + i\epsilon} \end{aligned} \quad (8)$$

Den Zusammenhang von (8) mit der MANDELSTAM-Darstellung kann man mit Hilfe der FEYNMAN-Identität einsehen [13]. Die Belegfunktionen $\rho(z, \gamma)$ in (8) sind dabei durch die einfachen und doppelten Spektralfunktionen der MANDELSTAM-Darstellung gegeben. Umgekehrt ist es jedoch nicht möglich, die MANDELSTAM-

Darstellung allein aus (8) herzuleiten. Für festes t und analog für festes s oder u gibt es weiter einfache Forderungen an die Belegfunktionen $\rho(z, \gamma)$ in (8), die auf Dispersionsrelationen für $f_4(\underline{s})$ führen.

Für Darstellungen von N -Punktfunktionen mit $N \geq 5$, wie man sie z.B. zur Beschreibung von Produktionsprozessen benötigen würde, ist es nicht mehr möglich, eine Form analog zu (4) anzugeben, die symmetrisch in den äußeren Impulsen ist. Je nachdem welchen Impuls man auszeichnet, erhält man eine andere Darstellung. Ihre Anwendung ist natürlich erst dann sinnvoll, wenn man ausreichend Erfahrung mit der Vierpunktfunktion gesammelt hat, wozu diese Arbeit beitragen soll.

Allgemeinere mathematische Eigenschaften der hier angesprochenen Integraldarstellungen wurden eingehend von NAKANISHI untersucht [13,25,26,27]. Die Diskussion der Belegfunktionen, die ja einen wesentlichen Teil der Physik enthalten, ist bei weitem nicht abgeschlossen.

3. Eigenschaften der Belegfunktion

Nach der Betrachtung von Beispielen wird in diesem Abschnitt die Frage untersucht, welche Aussagen man allgemein über die Struktur der Belegfunktionen machen kann. Dabei wird insbesondere ihr Distributionscharakter herausgestellt.

Die Konstruktion der NAKANISHI-Darstellung beruht darauf, daß man zu jedem FEYNMAN-Graphen die ihm entsprechende Belegfunktion angeben kann. Obwohl physikalisch nur die unendliche Summe der Beiträge aller einzelnen Graphen ausschlaggebend ist, wollen wir doch, damit man ein Gefühl dafür bekommt, wie eine Belegfunktion aussehen kann, Beispiele betrachten, die zu relativ einfachen Graphen gehören und somit explizit angebar sind.

Damit die Rechnungen überschaubar bleiben, soll zunächst als Modellfall eine Theorie mit ϕ^3 -Wechselwirkung untersucht werden. Die Diskussion wird im wesentlichen auf den hier ja besonders interessierenden Fall der Vierpunktfunktion beschränkt. Die Methode ist dabei die, zunächst das dem betrachteten Graphen entsprechende FEYNMAN-Parameterintegral zu ermitteln und daraus die Belegfunktion der NAKANISHI-Darstellung zu bestimmen.

Das FEYNMAN-Parameterintegral eines Graphen G hat die Form [13]

$$f_G(\underline{s}) = (L-2\mu-1)! \prod_{\ell} \int_0^1 d\alpha_{\ell} \delta(1-\sum_{\ell} \alpha_{\ell}) \frac{1}{U^2(V+i\epsilon)^{L-2\mu}} \quad (9)$$

L ist die Anzahl der inneren Linien, ℓ läuft über alle inneren Linien und für zusammenhängende Graphen gilt

$\mu = L - (\text{Anzahl der Vertices}) + 1$. U ist eine Funktion der α , V eine der α und der äußeren Impulse und damit der Variablen $\underline{s}$. U und V lassen sich nach den bekannten Regeln angeben [13,28]. Für den Fall, daß das Integral (9) nicht definiert ist, muß eine der üblichen Regularisierungs- und Renormierungsvorschriften zu seiner Festlegung angewandt werden.

Bei der Umrechnung von (9) auf die NAKANISHI-Form ergibt sich zunächst

$$f_G(\underline{s}) = \prod_{i=1}^M \int_0^1 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^M z_i) \int_0^\infty d\alpha \frac{\bar{\varphi}_G(z, \alpha)}{(\sum_{i=1}^M z_i s_i^{-\alpha + i\epsilon})^{L-2\mu}} \quad (10)$$

mit

$$\delta(1 - \sum_{i=1}^M z_i) \bar{\varphi}_G(z, \alpha) = (L-2\mu-1)! \prod_{\ell} \int_0^1 d\alpha_{\ell} \delta(1 - \sum_{\ell} \alpha_{\ell}) \frac{1}{U^{2\xi} \xi^{L-2\mu}} \cdot \prod_{i=1}^M \delta(z_i - \frac{\zeta_i}{\xi}) \delta(\alpha - \frac{1}{\xi} \sum_{\ell} \alpha_{\ell} m_{\ell}^2) \quad (11)$$

wobei $\xi = \sum_{i=1}^M \zeta_i$ ist und die ζ_i , $i=1, \dots, M$ Funktionen der α sind. $L-2\mu-1$ fache partielle Integration in (10) bzgl. α führt zu der NAKANISHI-Form (1). Da man diese Form für jeden Graphen erreichen kann, hat man sie auch für die Menge aller Graphen. Der Beitrag des Graphen G zur Spektralfunktion φ_N ist dabei gegeben durch

$$\varphi_G(z, \alpha) = \frac{1}{(L-2\mu-1)!} \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^{L-2\mu-1} \bar{\varphi}_G(z, \alpha) \quad (12)$$

Es ist natürlich praktisch nicht möglich und auch wenig sinnvoll, φ_N aus den Beiträgen der einzelnen Graphen zu berechnen.

Es erscheint hier angebracht, noch eine Bemerkung zum Verschwinden der Randterme bei der partiellen Integration bzgl. α beim Übergang von der Form (10) in die Form (1) zu machen.

Da $\bar{\varphi}_G(z, \alpha)$ für $\alpha < 0_\infty$ auf jeden Fall verschwindet [13], kann $\int_0^\infty d\alpha \dots$ in (10) durch $\int_{-\infty}^\infty d\alpha \dots$ ersetzt werden. Wenn

$$\int_{-\infty}^\infty d\alpha \frac{\bar{\varphi}_G(z, \alpha)^{-\infty}}{(\sum_{i=1}^M z_i s_i^{-\alpha + i\epsilon})^{L-2\mu}} \text{ konvergiert, geht } \bar{\varphi}_G(z, \alpha)$$

höchstens wie α^ℓ mit $\ell < L-2\mu-1$ für $\alpha \rightarrow \infty$ und damit konvergieren auch die Integrale $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(\sum_{i=1}^M z_i s_i^{-\alpha + i\epsilon})^{L-2\mu-n}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^n \bar{\varphi}_G(z, \alpha)$ für

$n=1, \dots, L-2\mu-1$ und die Randterme liefern keinen Beitrag, da

$$\frac{1}{(\sum_{i=1}^M z_i s_i - x + i\epsilon)^{L-2\mu-n}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+1} \overline{\varphi}(z, x) \text{ höchstens wie } x^{L-(L-2\mu-1)}$$

für $x \rightarrow \infty$ geht. In Fällen, wo $\overline{\varphi}_G$ die untere x -Integrationsgrenze als θ -Funktion enthält, entstehen durch die partiellen Integrationen δ -Funktionen und deren Ableitungen.

Zu den folgenden Beispielen stellt sich die Frage, ob man es einem Graphen nicht von vornherein ansehen kann, zu welchen der Belegfunktionen φ_{st} , φ_{tu} und φ_{su} er beiträgt. Die Antwort liefert die Untersuchung seiner topologischen Eigenschaften mit graphentheoretischen Methoden [29]. Nach den daraus abgeleiteten Regeln ergeben die verschiedenen Austausch- und Boxgraphen jeweils immer nur einen Beitrag zu einer dieser Belegfunktionen. Erst kompliziertere nichtplanare Graphen liefern gleichzeitig Beiträge zu mehreren der Belegfunktionen.

Bei den Austauschgraphen sind die Verhältnisse außerordentlich einfach. Der t-Kanal-Austausch eines Teilchens der Masse m_t gibt den Beitrag

$$\varphi_{st} = \delta(z_a)\delta(z_b)\delta(z_c)\delta(z_d)\delta(z_s)\delta(x-m_t^2) \quad (13)$$

$$\varphi_{tu} = \varphi_{su} = 0$$

Für einen s- bzw. u-Kanal-Austausch von Teilchen der Masse m_s bzw. m_u gilt $\varphi_{st} = \varphi_{tu} = 0$ bzw. $\varphi_{st} = \varphi_{su} = 0$, und φ_{su} bzw. φ_{tu} erhält man aus (13), indem man $\delta(z_s)\delta(x-m_t^2)$ durch $\delta(z_u)\delta(x-m_s^2)$ bzw. $\delta(z_t)\delta(x-m_u^2)$ ersetzt.

Es sollen nun NAKANISHI-Belegfunktionen komplizierterer Graphen berechnet werden. Die Bestimmung der Beiträge der Boxgraphen soll am Beispiel des planaren Graphen in Abb.1 erläutert werden. Den inneren Linien sind die Massen m_ℓ , $\ell=1,2,3,4$ entsprechend Abb.1 zugeordnet. Für das FEYNMAN-Parameterintegral (9) gilt hier [13,28,30]:

$$U = \sum_{\ell} \alpha_{\ell} \quad (14)$$

$$V = \alpha_1 \alpha_2 s_a + \alpha_2 \alpha_3 s_b + \alpha_1 \alpha_4 s_c + \alpha_3 \alpha_4 s_d + \alpha_1 \alpha_3 s + \alpha_2 \alpha_3 t - \sum_{\ell} \alpha_{\ell} m_{\ell}^2$$

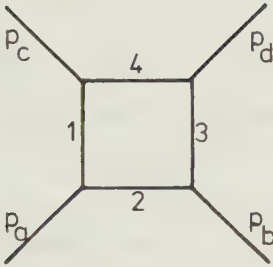


Abb.1 : Planarer Boxgraph mit Φ_4^a als Beitrag zur Belegfunktion.

Die α tragen jeweils den Index ihrer zugeordneten inneren Linie. Für alle Boxgraphen ist $\mu=1$ und $L=4$.

Die dem Graphen aus Abb.1 zugeordnete Belegfunktion $\bar{\Phi}_4^a(z, \alpha)$ erhält man aus (11), das jetzt die Form

$$\begin{aligned} \delta(1 - \sum_i z_i) \bar{\Phi}_4^a(z, \alpha) &= (L-2\mu-1)! \prod_{\ell=1}^4 \left(\int_0^1 d\alpha_\ell \right) \delta\left(1 - \sum_{\ell=1}^4 \alpha_\ell\right) \int d\xi \cdot \\ &\cdot \prod_i \left(\int d\zeta_i \delta\left(z_i - \frac{\zeta_i}{z_i}\right) \right) \delta(\zeta_a - \alpha_1 \alpha_2) \delta(\zeta_b - \alpha_2 \alpha_3) \delta(\zeta_c - \alpha_1 \alpha_4) \cdot \delta(\zeta_d - \alpha_3 \alpha_4) \cdot \\ &\cdot \delta(\zeta_s - \alpha_1 \alpha_3) \delta(\zeta_t - \alpha_2 \alpha_4) \delta(z_u) \cdot \delta\left(\alpha - \frac{1}{\xi} \sum_{\ell} \alpha_\ell m_\ell^2\right) \frac{1}{\left(\sum_{\ell} \alpha_\ell\right)^{\frac{1}{2} L - 2\mu}} \end{aligned} \quad (15)$$

annimmt, denn auf der rechten Seite der Gleichung kann man sofort über die ζ integrieren und $\delta(1 - \sum_i z_i)$ herausziehen.

Es wird hier deutlich, daß obwohl die Box noch ein verhältnismäßig einfacher FEYNMANgraph ist, die Integration über die α und ξ schon etwas langwierig wird. Dank der vielen δ -Funktionen kann sie explizit durchgeführt werden. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_4^a(z, \alpha) &= \delta(z_u) \delta(z_a z_d - z_b z_c) \delta(z_a z_d - z_s z_t) \cdot \\ &\cdot \delta\left(\alpha - R(m_1^2 z_b^{-1} + m_2^2 z_s^{-1} + m_3^2 z_a^{-1} + m_4^2 z_d^{-1} z_b^{-1} z_s^{-1})\right) \end{aligned} \quad (16)$$

mit $R = z_a z_b + z_a z_d + z_a z_s + z_b z_s$

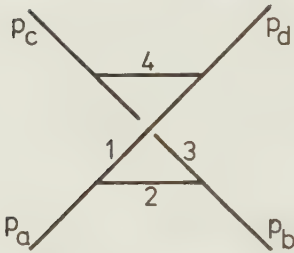
Wegen $L-2\mu-1=1$ wird nach (12) eine partielle Integration bzgl. α notwendig. Der Beitrag des planaren Boxgraphen zur Beleg-

funktion $\Phi_4(z, \varkappa)$ ist demnach

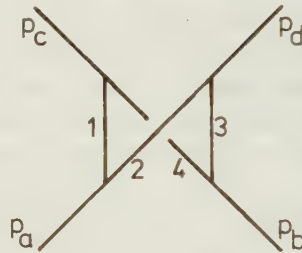
$$\Phi_4^a(z, \varkappa) = - \frac{\partial}{\partial \varkappa} \bar{\Phi}_4^a(z, \varkappa) \quad (17)$$

und enthält damit die Ableitung einer δ -Funktion. Wie man sieht ist $\Phi_{tu}^a = \Phi_{su}^a = 0$ und es gilt $\Phi_4^a(z, \varkappa) = \delta(z_u) \Phi_{st}^a$.

Ganz analog erhält man die Belegfunktionen Φ_4^b und Φ_4^c für die nichtplanaren Boxgraphen der Abb.2, indem man in (16) z_t mit z_u und z_c mit z_d bzw. z_s mit z_u und z_b mit z_d vertauscht.



Graph mit Beitrag Φ_4^b



Graph mit Beitrag Φ_4^c

Abb.2 : Nichtplanare Boxgraphen mit den Beiträgen Φ_4^b und Φ_4^c zur Belegfunktion.

Damit ist im einen Fall $\Phi_4^b(z, \varkappa) = \delta(z_t) \Phi_{su}^b$ und $\Phi_{st}^b = \Phi_{tu}^b = 0$ und im anderen $\Phi_4^c(z, \varkappa) = \delta(z_s) \Phi_{tu}^c$ und $\Phi_{st}^c = \Phi_{su}^c = 0$.

Es ist interessant, diese Ergebnisse für die Box mit dem Beitrag Φ_3^D des Dreiecksgraphen Abb.3 zur Belegfunktion Φ_3 der Dreipunktfunktion $f_3(\underline{s})$ in (3) zu vergleichen [31,32,33].

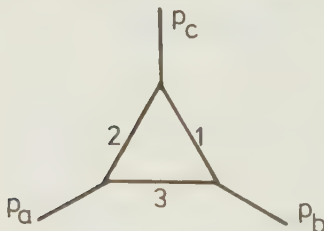


Abb.3 : Der Dreiecksgraph

Es gilt dort

$$\Phi_3^D(z_a, z_b, z_c, \alpha) = R_D^{-1} \delta(\alpha - R_D(m_1^2 z_a^{-1} + m_2^2 z_b^{-1} + m_3^2 z_c^{-1})) \quad (18)$$

mit $R_D = z_a z_b + z_a z_c + z_b z_c$.

Die bisher betrachteten Beispiele (13), (16) und (18) von Beiträgen zu den Belegfunktionen $\Phi_3(z, \alpha)$ und $\Phi_4(z, \alpha)$ zeigen gemeinsame Züge. Stets treten Produkte von δ -Funktionen und evtl. ihren Ableitungen auf, deren Argumente Funktionen der Integrationsvariablen z und α und der den inneren Linien zugeordneten Massen sind. Die inneren Massen sind dabei maßgebend für den Träger der Belegdistributionen, der ja nicht der gesamte z - und α -Integrationsbereich von (1) ist, und damit auch für die analytischen Eigenschaften der Beiträge zu den N-Punktfunktionen $f_3(\underline{s})$ und $f_4(\underline{s})$.

Bezüglich des Integrationsbereichs von (1) soll hier noch auf folgendes aufmerksam gemacht werden: Die übliche (und auch hier verwendete) Schreibweise, in den Integraldarstellungen endliche Integrationsgrenzen anzugeben, wie etwa 0 und 1 für die z -Integrationen in (1), kann zu einem Mißverständnis führen. Unvoreingenommen wird man $\int_0^1 dz \dots$ als $\int dz \theta(z) \theta(1-z) \dots$ verstehen und damit zu mathematisch nicht definierten Ausdrücken kommen, wenn die Belegfunktionen, wie in den diskutierten Beispielen, in 0 oder 1 konzentrierte Distributionen enthalten.

Ein Blick auf die Herleitung der NAKANISHI-Darstellung (1) bringt die Lösung des Problems. Der wichtige Schritt ist dort die Umformung des FEYNMAN-Parameterintegrals (9) in die Integraldarstellung in Gleichung (10). Diese besteht in einer Multiplikation von (9) mit der Identität

$$1 = \prod_{i=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z_i - \frac{\zeta_i}{\xi}) dz_i \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \delta(\alpha - \frac{1}{\xi} \sum_l \alpha_l m_l^2) \quad (19)$$

und einer Vertauschung der Integrationsreihenfolge^{*)}. Alle Belegfunktionen besitzen nach Konstruktion (11) einen durch $0 \leq z_i \leq 1$ und $x \geq 0$ beschränkten Träger. Daher darf man, ohne einen Fehler zu begehen, $\int_0^\infty dz \int_0^\infty dx \dots$ durch $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{1+\epsilon} dz \int_{-\epsilon}^\infty dx \dots$ ersetzen. Normalerweise bedeutet nun die Angabe von Integrationsgrenzen in der Form $\int_0^\infty dz \int_0^\infty dx \dots$ nichts anderes als diesen Sachverhalt. Gelegentlich stehen die endlichen Integrationsgrenzen noch für θ -Funktionen, die man in den Belegfunktionen weglassen hat. In jedem Fall treten aber die oben angesprochenen mathematisch nicht definierten Ausdrücke nicht auf.

Es sollen nun zunächst noch die restlichen Graphen der ϕ^3 -Theorie für die Vierpunktfunktion betrachtet werden, die von gleicher Ordnung wie die Boxgraphen sind. Bei der Bestimmung der Belegfunktionen für die Gruppe von Graphen, die man aus den Austauschgraphen erhält, wenn man einen der Vertices durch den Dreiecksgraphen ersetzt, kann man wie bei der Box vorgehen. So erhält man z.B. für den Graphen der Abb.4 den Beitrag

$$\bar{\Phi}_4^d(z, x) = \delta(z_t) \bar{\Phi}_{su}^d \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{su}^d &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\alpha_\ell} \delta(1 - \sum_{\ell=1}^4 \alpha_\ell) \int_0^1 dU \frac{1}{U^2} \delta(U - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \cdot \\ &\cdot \int d\xi \delta(z_s \xi - U^{-1} [\alpha_4 (1 - \alpha_4) + \alpha_2 \alpha_3]) \delta(z_a \xi - U^{-1} \alpha_1 \alpha_3) \cdot \\ &\cdot \delta(z_b \xi - U^{-1} \alpha_1 \alpha_2) \delta(z_c) \delta(z_d) \delta(z_u) \delta(x - \frac{1}{\xi} \sum_{\ell=1}^4 \alpha_\ell m_\ell^2) \end{aligned} \quad (20)$$

Die Zahl der Integrationen deckt sich hier mit der der ausnutzbaren δ -Funktionen (es ist also eine weniger ausnutzbar als beim Boxgraphen). Führt man sie aus, so erhält man einen langen Ausdruck, der selbst für den Spezialfall $m_\ell = m$, $\ell=1, \dots, 4$ aus Raumgründen hier nicht wiedergegeben werden kann. Seine Struktur ist jedoch einfach zu überblicken. $\bar{\Phi}_{su}^d(z, x)$ ist ein

^{*)} Das (19) entsprechende Integral (17-8) in [13] ist nur definiert, wenn alle Parameter ξ_n ungleich Null sind. Wie man an Gl.(17-6) in [13] und den in dieser Arbeit diskutierten Beispielen sehen kann, ist dies nicht immer der Fall. Es treten jedoch keine Schwierigkeiten auf, wenn die Integrationsgrenzen wie in (19) gewählt werden.

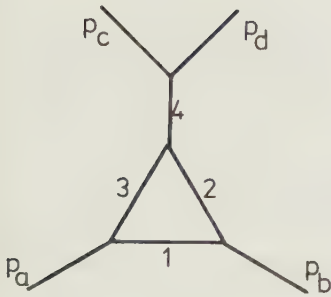


Abb.4 : Graph mit dem Beitrag Φ_4^d zur Belegfunktion.

Produkt einer gewöhnlichen Funktion von z und α mit θ -Funktionen, deren Argumente ebenfalls Funktionen von z und α sind. Den Beitrag des Graphen zu Φ_{su}^d in (4) erhält man wie bei der Box (17) durch Ableitung von $\bar{\Phi}_{su}^d(z, \alpha)$ nach α . Bei der Gruppe von Graphen, die aus den Austauschgraphen durch Einschub einer Selbstenergieblase entstehen, kommt man zu divergenten Integralen für die Belegfunktionen, so daß Regularisierung und Renormierung durchzuführen sind.

Im nächsten Schritt sind die Verhältnisse bei höheren Graphen daraufhin zu untersuchen, ob man bei den einfachen Beispielen das allgemeine Prinzip des Aufbaus der Belegfunktionen schon hinreichend erkannt hat. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, nach der hier angewandten Methode Belegfunktionen beliebig komplizierter Graphen zu berechnen. Dazu lassen sich mit Hilfe der Graphentheorie jeweils die Funktionen U und V in (9) bestimmen. Damit hat man nach (11) und (12) die Belegfunktion, zumindest in der Form eines Integrals. Die Auswertung dieser Integrale wird jedoch rasch immer komplizierter, sobald man auch nur etwas über die Box hinausgeht. Die bei der expliziten Berechnung entstehenden komplizierten Ausdrücken bringen keine zusätzlichen Erkenntnisse. Es lassen sich jedoch schon aus der Integralform weitere Schlüsse auf die Struktur der Belegfunktion ziehen. Für den Graphen von Abb.5 erhält man beispielsweise den Beitrag

$$\Phi_{st}^d = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \bar{\Phi}_{st}^d \quad (\text{da } L-2\mu-1 = 2) \quad \Phi_{tu}^d = \Phi_{su}^d = 0$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{st}^d = 2 \cdot & \prod_{\ell=1}^7 \left(\int_0^1 d\alpha_{\ell} \right) \delta \left(1 - \sum_{\ell=1}^7 \alpha_{\ell} \right) \\ & \cdot \int_0^{\infty} dU \delta \left(U - \alpha_7 (1 - \alpha_7) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) (\alpha_5 + \alpha_6) \right) \\ & \cdot \int_0^{\infty} d\xi \delta \left(z_a \xi U - \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) - \alpha_5 \alpha_6 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_7) \right) \\ & \cdot \delta \left(z_b \xi U - \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) - \alpha_3 \alpha_6 \alpha_7 \right) \\ & \cdot \delta \left(z_c \xi U - \alpha_1 \alpha_4 (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) - \alpha_4 \alpha_5 \alpha_7 \right) \\ & \cdot \delta \left(z_d \xi U - \alpha_3 \alpha_4 (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) \right) \\ & \cdot \delta \left(z_s \xi U - \alpha_1 \alpha_3 (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_3 \alpha_5 \alpha_7 \right) \\ & \cdot \delta \left(z_t \xi U - \alpha_2 \alpha_4 (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_4 \alpha_6 \alpha_7 \right) \\ & \cdot U^4 \xi^2 \delta \left(\alpha - \frac{1}{\xi} \sum_{\ell=1}^7 m_{\ell}^2 \alpha_{\ell} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

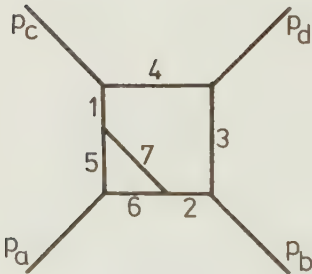


Abb.5 : Graph mit dem Beitrag $\Phi_4^d(z, \alpha)$ zu $\Phi_4(z, \alpha)$.

Hier stehen 9 δ -Funktionen schon 9 Integrationen gegenüber. Bei noch höheren Graphen übersteigt die Zahl der Integrationen sehr schnell die der δ -Funktionen, da neben den Integrationen über ξ und U jeweils L Integrationen über die α auftreten. Es wäre jedoch ein Irrtum anzunehmen, daß damit die Belegfunktionen ihren Distributionscharakter verlieren. Es verbleiben immer Θ -Funktionen, da der Integrationsbereich der α auf $[0,1]$ beschränkt ist. Bei der betrachteten ϕ^3 -Theorie ist die Anzahl $L-\mu-1$ der nach (12) zur Bestimmung von $\Phi_G(z, \alpha)$ aus $\Phi_G(z, \alpha)$ nötigen Differentiationen nach α durch $\frac{L+2}{3}-1$ gegeben. Allgemein wird demnach bei höheren Graphen $\Phi_G(z, \alpha)$ stets die Form einer $\frac{L+2}{3}-1$ fachen Ableitung eines Produktes von Θ -Funktionen, deren Argumente von z und α abhängen, mit einer Funktion von z und α haben.

Nach dieser Untersuchung der Struktur der Belegfunktion in der ϕ^3 -Theorie soll an Beispielen nachgeprüft werden, womit man bei anderen Wechselwirkungen eventuell zusätzlich zu rechnen hat.

In der ϕ^4 -Theorie ist für alle Graphen, die zur Vierpunktfunktion beitragen, $L-2\mu = 0$. Demnach wird der Exponent im Nenner von (10) zu Null und in (11) tritt der nicht definierte Faktor $(-1)!$ auf. Regularisierung und Subtraktion werden unumgänglich. Um die Verhältnisse in diesem Fall zu untersuchen, soll zunächst das Verfahren am Beispiel des Graphen in Abb.6 durchgeführt werden.

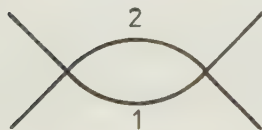


Abb.6 : Graph mit Beitrag Φ^e zur Belegfunktion.

Die Verwendung der analytischen Regularisierung [34] führt für die Belegfunktionen auf die Form

$$\begin{aligned} \Phi_{st}^e(z, \alpha, \lambda) &= \frac{\Gamma(\lambda_0 - 2)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1^{\lambda_1 - 1} \alpha_2^{\lambda_2 - 1} \\ &\cdot \int d\xi \frac{1}{\xi^{\lambda_0 - 2}} \delta(\xi - \alpha_1 \alpha_2) \delta(z_s) \delta(z_a) \delta(z_b) \delta(z_c) \delta(z_d) \\ &\cdot \delta(\alpha - \frac{1}{\xi} (\alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_2^2)) \end{aligned} \quad (22)$$

mit $\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2$

wobei der Exponent im Nenner von (10) zu $\lambda_0 - 2$ wird. Subtraktion und anschließend durchgeführter Übergang $\lambda_i \rightarrow 1$ ergibt für die Vierpunktfunktion den Beitrag

$$f_4^e(\underline{s}) = f_4^e(\underline{s} = \underline{s}_0) + \int_0^1 dz \int_0^1 d\alpha \frac{\hat{\Phi}_4^e(z, \alpha)}{\int z_i s_{oi} - \alpha} \frac{\int z_i (s_{oi} - s_i)}{\int z_i s_{oi} - \alpha} \quad (23)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_4^e(z, \alpha) &= -\delta(z_a) \delta(z_b) \delta(z_c) \delta(z_d) \delta(z_s) \delta(z_u) \Theta(\alpha - (m_1 + m_2)^2) \cdot \\ &\cdot \sqrt{1 - 2 \frac{m_1^2 + m_2^2}{\alpha} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{\alpha^2}} \end{aligned} \quad (24)$$

Setzt man speziell $m_1 = m_2 = m$ und $t_0 = 0$ und rechnet das Integral (23) aus, so ergibt sich mit

$$- \int_0^1 dx \ln[m^2 - x(1-x)t] \quad (25)$$

der gleiche Ausdruck wie für den endlichen Anteil einer Vakuumblase in der Φ^3 -Theorie [13].

Bei einem beliebigen Φ^4 -Graphen zur Vierpunktfunktion ohne Selbstenergieeinschübe kann man wie eben bei dem einfachen Graphen aus Abb.6 vorgehen. Man hat dann für den endlichen Anteil eine Darstellung der Form

$$f_{4 \text{ endlich}}(\underline{s}) = \text{const.} + \int_0^1 dz \int_0^1 d\alpha \frac{\int z_i (s_{oi} - s_i)}{\int z_i s_{oi} - \alpha} \frac{\hat{\Phi}(z, \alpha)}{\int z_i s_{oi} - \alpha} \quad (26)$$

wobei die Konstante durch den Subtraktionspunkt bestimmt ist.

$\hat{\Phi}_G(\underline{z}, \alpha)$ erhält man aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
 -\delta\left(1 - \sum_{i=1}^M z_i\right) \hat{\Phi}_G(\underline{z}, \alpha) &= \prod_{\ell} \left(\int_0^1 \alpha_{\ell}\right) \delta\left(1 - \sum_{\ell} \alpha_{\ell}\right) \frac{1}{2} \prod_{i=1}^M \delta\left(z_i - \frac{z_i}{\xi}\right) \cdot \\
 &\cdot \Theta\left(\alpha - \frac{1}{\xi} \sum_{\ell} \alpha_{\ell} m_{\ell}^2\right)
 \end{aligned} \tag{27}$$

die jetzt anstelle von (11) tritt.

Bei Theorien mit Spin ist die von NAKANISHI gegebene Herleitung der Integraldarstellung nicht ausreichend. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man doch zu einer entsprechenden Darstellung kommt. Dabei wird der Distributionscharakter der Belegfunktionen noch deutlicher. Für Teilchen mit Spin tritt an die Stelle einer einzelnen Vierpunktfunktion eine Anzahl von invarianten Amplituden. Diese lassen sich für die einzelnen Graphen wieder in FEYNMANparameter-Darstellung angeben [13,35]. Die Struktur der Nenner ist dabei wieder wie in (9). Die Zähler dagegen sind jetzt ein Polynom der aus den äußeren Impulsen gebildeten Invarianten mit α -Parameter-abhängigen Funktionen als Koeffizienten. Man kann nun entsprechend der Umformung, die von (9) auf (10) geführt hat, die NAKANISHI-Variablen $\underline{z}$ und α einführen. Im Nenner kommt man zur alten Form. Im Zähler hat man jetzt aber ein Polynom in den Impulsinvarianten mit Koeffizienten, die von $\underline{z}$ und α abhängen. Das Problem ist nun, daß die Impulsinvarianten, die bei jedem Graphen verschieden auftreten, irgendwie beseitigt werden müssen. Das gelingt durch Umformungen mit Hilfe partieller Integrationen bezüglich geeigneter z_i und α . Damit kann man für den Beitrag eines jeden einzelnen Graphen zu einer invarianten Amplitude die Form (1) erhalten und damit die invarianten Amplituden in dieser Form darstellen. Für die Durchführbarkeit der partiellen Integrationen ist dabei der Distributionscharakter der Belegfunktionen wesentlich.

Für die Art von Umformungen durch partielle Integrationen nach verschiedenen Variablen, wie sie im Spinfall weiterhelfen, soll

hier noch eine weitere Anwendung aufgezeigt werden. Die subtrahierte Form der NAKANISHI-Darstellung [13]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\hat{\Phi}_4(z, \alpha)}{\sum_i z_i s_i - \alpha} \left[\frac{\sum (s_{0i} - s_i)}{\sum z_i s_i - \alpha} \right]^k \quad (28)$$

die z.B. auch in (26) auftrat, läßt sich durch entsprechende Schritte auf die ursprüngliche Form (1) der NAKANISHI-Darstellung bringen.

Zusammenfassend bietet sich im Rahmen der Störungstheorie also dieses Bild: Nach [13] beschreibt die NAKANISHI-Darstellung (1) N-Punktfunktionen durch auf Testfunktionen der Gestalt $\frac{1}{\sum_{i=1}^M z_i s_i - \alpha}$ definierte Distributionen, die auf der $(M-1)$ -dimensionalen durch $1 = \sum_{i=1}^M z_i s_i$ definierten Fläche konzentriert sind und deren Träger durch $z_i \geq 0$, $i=1, \dots, M$ und $\alpha \geq 0$ beschränkt ist. Diese Distributionen sind Linearkombinationen von gegebenenfalls unendlich vielen Distributionen und lassen für $N=4$ immer eine Zerlegung nach (5) zu.

In den vorangegangenen Untersuchungen sind vor allem die folgenden Ergebnisse wichtig:

- Die NAKANISHI-Form (1) ist auch im Fall von Teilchen mit Spin anwendbar. Sie ist dort für die invarianten Amplituden zu verwenden.
- Die subtrahierte Form der NAKANISHI-Darstellung kann auf die Form (1) gebracht werden. Das bedeutet, daß auch renormierte Theorien durch (1) beschrieben werden können.
- Die Belegfunktionen selbst sind in allen Fällen (gleichgültig ob N-Punktfunktionen im skalaren Fall oder invariante Amplituden im Fall mit Spin oder die Darstellung in der subtrahierten Form verwendet wird) eine Summe von Produkten von Funktionen von z und α mit δ -Funktionen und ihren Ableitungen, deren Argumente Funktionen von z und α sind.

Es zeigt sich insbesondere, daß auch die Beiträge höherer Graphen zu den Belegfunktionen Distributionen enthalten.

Insgesamt tritt die Wichtigkeit des Distributionscharakters der Belegfunktionen hervor. In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, daß dieser in der Literatur, insbesondere bei Anwendungen der DGS-Darstellung, meist nicht berücksichtigt wird. Das Unbehagen über dadurch hervorgerufene Erscheinungen führt gelegentlich zu umständliche Formulierungen [36].

4. Beschreibung von Hadron-Hadron-Streuung im asymptotischen Bereich mit Hilfe der NAKANISHI-Darstellung

Nachdem in Kapitel 3 die allgemeinen Eigenschaften der Belegfunktionen, wie sie sich aus der Störungstheorie ergeben, untersucht wurden, soll jetzt wieder zu der phänomenologischen Betrachtungsweise zurückgekehrt werden. Die Frage ist zu klären, ob und wie experimentelle Befunde, konkret heißt das bestimmte vorgegebene Streuamplituden, mit Hilfe der NAKANISHI-Darstellung beschrieben werden können. Natürlich ist es aussichtslos, sofort nach Belegfunktionen zu suchen, die sämtliche Einzelheiten empirischer Vierpunktfunktionen widerspiegeln. Man wird mit wichtigen einfachen Eigenschaften beginnen. Daher wird die Diskussion hier auf Belegfunktionen beschränkt, die das asymptotische Verhalten (von dem man am ehesten Einfachheit erwartet), richtig ergeben.

Als asymptotisches Verhalten soll hier^{*)} genauer die Abhängigkeit der Funktion $f_N(\underline{s})$ von den Variablen $\underline{s}$ bezeichnet werden, wenn für mindestens ein s_i die Beziehung $|s_i| \gg m^2$ gilt, wobei m eine im jeweiligen Fall maßgebende Masse ist (i.A. die größte Masse, die in einer Theorie zu $f_N(\underline{s})$ auftaucht). Im allgemeinen Sprachgebrauch geht man davon aus, daß m nicht größer als einige GeV ist. Eine gebräuchliche Abkürzung für $|s_i| \gg m^2$ ist die Schreibweise $|s_i| \rightarrow \infty$, die auch hier verwendet werden soll. Natürlich können auch mehrere der s_i gleichzeitig asymptotisch werden. Typische Beispiele, auf die im folgenden eingegangen wird, sind der Weitwinkel- und der Reggebereich bei der elastischen Streuung; im ersteren Falle hat man $s, t \rightarrow \infty$ mit $s/t = \text{const}$, im letzteren $s \rightarrow \infty$, t fest.

Zunächst sind jedoch noch einige allgemeine Bemerkungen zur Bestimmung von Belegfunktionen bei vorgegebener N-Punktfunktion

^{*)} Oft wird auch nur die Abhängigkeit von den asymptotischen Variablen als das asymptotische Verhalten bezeichnet, wobei man stillschweigend davon ausgeht, daß die nichtasymptotischen Variablen entweder festgehalten werden oder ohne Einfluß sind.

angebracht. NAKANISHI hat gezeigt, daß die Darstellung (1) eindeutig ist, d.h. wenn $f_N(\underline{s}) \equiv 0$ ist, verschwindet die Belegfunktion [13,25]. Auf die Frage, ob jede beliebige vorgegebene Funktion $f_N(\underline{s})$ eine Darstellung der Form (1) zuläßt, soll später zurückgekommen werden. In [25],[26] und [27] werden Verfahren angegeben, die regelrecht die Konstruktion der Belegfunktionen ermöglichen, falls $f_N(\underline{s})$ bestimmten Bedingungen genügt. Jedoch erweisen sich die so bestimmten Belegfunktionen schon relativ einfacher N-Punktfunktionen als ziemlich kompliziert. Es ist also nicht zweckmäßig, einfache Vierpunktfunktionen anzusetzen, die das gewünschte asymptotische Verhalten zeigen und nach diesem Verfahren Belegfunktionen zu berechnen. Hier wird deshalb ein anderer Weg eingeschlagen. Da die betrachteten Vierpunktfunktionen zunächst einmal den asymptotischen Bereichen richtig wiedergeben sollen, kann man zunächst auch von Belegfunktionen ausgehen, die das asymptotische Verhalten richtig ergeben.

Man kommt mit relativ einfachen Belegfunktionen aus, wenn man sich auf eine zutreffende Beschreibung des asymptotischen Verhaltens beschränkt.

Es empfiehlt sich, das Auffinden geeigneter Belegfunktionen durch bestimmte Rechenmethoden zu erleichtern. Ein solches Verfahren wird als nächstes beschrieben.

Geht man von einer gegebenen N-Punktfunktion $f_N(\underline{s})$ aus und fragt nach der zugehörigen Belegfunktion $\Phi_N(z, \alpha)$ ihrer NAKANISHI-Darstellung (1), dann ist die Antwort leicht zu finden, wenn das betreffende $f_N(\underline{s})$ ein Produkt von Funktionen ist, deren Belegfunktionen bereits bekannt sind. Mit Φ_N^1 und Φ_N^2 als Belegfunktionen von f_N^1 und f_N^2 ist $f_N = f_N^1 \cdot f_N^2$ gegeben durch

$$f_N(\underline{s}) = \int dz' \int dz'' \int d\alpha' \int d\alpha'' \frac{\Phi_N^1(z', \alpha') \Phi_N^2(z'', \alpha'')}{(\int z_i' s_i - \alpha') (\int z_i'' s_i - \alpha'')} \quad (29)$$

Die Anwendung der FEYNMAN-Identität

Als weiteres Beispiel folgt aus den Belegfunktionen $\phi \cdot \delta(z_t)$ und $\phi \cdot \delta(z_s)$ mit

$$\phi = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \delta^{(m-1)}(\alpha) \delta(z_a) \dots \delta(z_d) \delta(z_u) \quad (35)$$

die zu $\frac{1}{s^m}$ und $\frac{1}{t^n}$ gehören, sofort die zu $\frac{1}{s^m t^n}$ als

$$\frac{(-1)^{n+m-1}}{(n-1)!(m-1)!} \Theta(z_t) \Theta(1-z_t) (1-z_t)^{m-1} z_t^{n-1} \delta^{(n+m-1)}(\alpha) \delta(z_a) \dots \dots \delta(z_d) \delta(z_u). \quad (36)$$

Die Θ -Funktionen können wie üblich weggelassen werden, wenn man die Grenzen der z_t -Integration in (6) mit 0 und 1 angibt. Damit ist es so auch möglich, die Belegfunktion für jede N-Punkt-funktion $f_N(\underline{s})$ in (1) zu finden, die sich als Polynom $P(\frac{1}{s})$ schreiben läßt, da die Belegfunktionen zu $\frac{1}{s_i}$, $i=1, \dots, M$ vorliegen.

Allgemein hat man hier ein Rezept, das die Konstruktion der Belegfunktion einer gegebenen N-Punktfunktion $f_N(\underline{s})$ immer dann ermöglicht, wenn man diese als ein Polynom von Funktionen von $\underline{s}$ schreiben kann, deren zugehörige Belegfunktionen man bereits kennt.

Vor der Diskussion des asymptotischen Verhaltens bestimmter physikalischer Prozesse ist noch zu klären, wie die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens eines Integrals der Form (1) bei vorgegebener Belegfunktion erfolgen kann.

Die Herleitung der NAKANISHI-Darstellung im Rahmen der Störungstheorie und ihre formale Ähnlichkeit mit den FEYNMAN-Integralen legen es nahe, dazu die Methoden heranzuziehen, mit denen das asymptotische Verhalten einzelner Terme der Störungsreihe untersucht wurde [38]. Mit den in diesen Arbeiten entwickelten und angewandten Rechenregeln läßt sich sofort für die Klasse von Belegfunktionen der NAKANASHI-Darstellung, die keine singulären Distributionen enthält, die Abänderung des asymptotischen Verhaltens gegenüber dem des Nenners durch das Auf-

treten von Endpunkt- und Pinch-Singularitäten ermitteln. Es bereitet dann keine größeren Schwierigkeiten, eine Belegfunktion anzugeben, die in der asymptotischen Variable $s_j (s_j \gg s_i, i \neq j)$ ein asymptotisches Verhalten der N-Punktfunktion wie $s_j^\alpha (\ln s_j)^\beta$ liefert [39]. Zu dieser Klasse von Belegfunktionen gehören auch die in [7] verwendeten Belegfunktionen für die DGS-Darstellung der Dreipunktfunktion. Es verwundert nicht weiter, daß diese Belegfunktionen in [7] dann auf ein Potenzverhalten -Logarithmen werden dort immer vernachlässigt- für das asymptotische Verhalten von Formfaktoren, Weitwinkelstreuung, tiefinelastische ep-Streuung usw. führen.

Da man es, wie in Abschnitt 3 gezeigt wurde, bei den Belegfunktionen Φ_N mit handfesten singulären Distributionen zu tun hat, muß man durchaus damit rechnen, daß sie das asymptotische Verhalten des Gesamtintegrals stärker von dem des Nenners in (1) abweichen lassen, als dies allein durch das Auftreten von Endpunkt- und Pinch-Singularitäten möglich ist. Singuläre Distributionen können sowohl Integration als auch Differenziation nach den Parametern $\underline{z}$ und $\underline{x}$ vorschreiben, so daß zum einen die Potenz des Nenners erhöht (um ganze Zahlen) werden kann und zum anderen Polynome in $\underline{z}$ in den Zähler gebracht werden können, bevor dann noch der Einfluß der oben erwähnten Singularitäten verbleibt. Demnach ist es möglich, jede N-Punktfunktion in ihrem asymptotischen Verhalten durch eine entsprechende Belegfunktion zu beschreiben, die in diesem ein beliebiges Potenzverhalten in den betreffenden Variablen zeigt (wobei die Potenzen nicht auf ganze Zahlen beschränkt sind). Die Möglichkeit, daß Belegfunktionen den Charakter singulärer Distributionen haben, ist bei Anwendungen der DGS- und verwandter Darstellungen fast immer außer acht gelassen worden.

Beispiele für Belegfunktionen, die es gestatten, auch N-Punktfunktionen die mit bestimmten s_i ansteigen (und nicht entsprechend dem Nenner abfallen), mit der NAKANISHI-Darstellung in der nichtsubtrahierten Form zu beschreiben, sind in [13] und [26] angegeben. Wesentlich bei solchen Belegfunktionen ist

es, daß sie Distributionen der Form $\gamma(h)$ enthalten, die definiert ist durch

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \frac{\text{Pf} x^{\lambda-1} \theta(x)}{\Gamma(\lambda)} & \text{für } \lambda \neq 0, -1, -2, \dots \\ &= \delta^{(n)}(x) & \text{für } \lambda = -n \end{aligned} \quad (37)$$

wobei Pf eine Vorschrift zur Bildung des Hauptwertes bedeutet [40] und h eine der Variablen $\underline{z}$ und $\underline{x}$ oder eine Funktion von diesen sein kann.

Das experimentell gefundene asymptotische Verhalten der elastischen Streuamplitude ist im Weitwinkelbereich im wesentlichen ein Potenzverhalten, also einfacher als im ebenfalls noch zu diskutierenden Reggebereich. Im Weitwinkelfall geht $s, t \rightarrow \infty$ mit $s/t = \text{const.}$ Bei den bisherigen Beschreibungen wurde das bereits erwähnte CIM-Modell [6] dadurch erweitert [7], daß die konstanten Vertexfunktionen in Abb.7 durch impulsabhängige in Form von DGS-Darstellungen ersetzt wurden. Wie aus dem vorangehenden hervorgeht, lassen sich leicht Belegfunktionen der DGS-Darstellung angeben, die das Potenzverhalten richtig wiedergeben. Es ergibt sich aus diesen Betrachtungen aber auch, daß dieses Verhalten ebenfalls durch eine Belegfunktion der NAKANISHI-Darstellung der on-shell-Vierpunktfunktion beschrieben werden kann. Da man keineswegs erwarten darf, daß die Streuamplitude allein durch Graphen wie in Abb.7 wiedergegeben

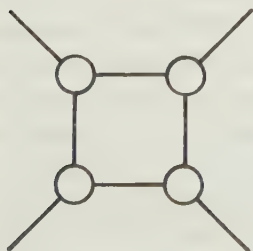


Abb.7 : Graph zur Beschreibung der Streuamplitude im CIM

wird, ist die exakte Darstellung durch die Vierpunktfunktion vorzuziehen. Die in deren Belegfunktionen auftretenden zusätzlichen Parameter bringen auch nicht mehr Probleme, als die, die man durch die Einführung der DGS-Darstellung in das CIM erhält. Die Verwendung der exakten Darstellung der Vierpunktfunktion bietet den Vorteil, daß man die Parameter auch durch Vergleich mit physikalischen Daten in anderen kinematischen Bereichen festlegen kann. In dieser Arbeit soll diesbezüglich noch auf den Reggebereich und auf den Zusammenhang mit elektromagnetischen Formfaktoren eingegangen werden. Bei diesen Betrachtungen ist die Beachtung des Distributionscharakters der Belegfunktionen wichtig.

Recht schwer tut sich die NAKANISHI-Darstellung mit der Beschreibung [41] hadronischer Streuamplituden im Reggebereich, $s \rightarrow \infty$, t fest, für den das Experiment bekanntlich ein Verhalten wie $\beta(t) s^{\alpha(t)}$ mit annähernd linearen Trajektorien $\alpha(t)$ und schwach variierendem $\beta(t)$ liefert. Keine der in der Literatur erwähnten Belegfunktionen führt auf ein Reggeverhalten mit linearen Trajektorien (Fixed Pole entsprechen einem Potenzverhalten und sind natürlich beschreibbar). Auch die in [27] angegebenen Methoden zur Konstruktion der Belegfunktionen bei vorgegebener N-Punktfunktion sind nicht anwendbar, weil die dort geforderten Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Die Ursache für diese Schwierigkeiten ist leicht zu sehen. Seit langem weiß man, daß es keinen einzelnen FEYNMAN-Graphen gibt, der eine Streuamplitude mit asymptotischem Reggeverhalten liefert. Erst eine unendliche Summe von entsprechend ausgewählten Diagrammen führt zum Ziel [42]. Die hier betrachteten Integraldarstellungen sind mit dem Blick auf die zu einem allgemeinen FEYNMANgraphen gehörende FEYNMANfunktion -in der Form eines Parameterintegrals- entwickelt worden. Ihre Struktur spiegelt demnach die des FEYNMANintegrals eines allgemeinen FEYNMANgraphen wider. Für den "Gebrauchswert" der betrachteten Integraldarstellungen bei der Diskussion des phänomenologisch gefunden asymptotischen Verhaltens der N-Punktfunktionen, das sich ja offensichtlich

nicht auf ein einfaches Potenzverhalten mit konstanten Exponenten beschränkt, ist es wichtig, auch für einen solchen Fall eine handliche Belegfunktion zu haben.

Prinzipiell ist es kein Problem, eine Belegfunktion für eine Vierpunktfunktion mit Reggeverhalten anzugeben, da einer unendlichen Summe von FEYNMANgraphen eine solche zugehöriger Belegfunktionen entspricht, und da ja ein Rezept vorliegt, nach dem man zu jedem gegebenen Graphen die zugehörige Belegfunktion bestimmen kann. Um eine Belegfunktion zu erhalten, die Reggeverhalten liefert, bietet sich an, in einer skalaren ϕ^3 -Theorie die Belegfunktionen der Leitergraphen aufzusummieren, da man weiß, daß die Summe dieser Graphen das gewünschte Verhalten zeigt. Dazu die Belegfunktionen der höheren Graphen exakt zu berechnen ist wegen deren Kompliziertheit praktisch nicht möglich, aber auch nicht nötig. Man weiß nämlich, daß bereits die Näherung durch Aufsummation der logarithmisch führenden Terme dieser Graphen oder auch z.B. die Aufsummation von Vierpunktfunktionen [6,28] Reggeverhalten liefert. Da die Leitern der ϕ^3 -Theorie ohnehin bestenfalls Modellcharakter haben können, ist also hier der vernünftigere Weg, von Belegfunktionen auszugehen, die das asymptotische Verhalten der einzelnen Graphen geeignet beschreiben, und diese aufzusummieren.

Zunächst sei die Belegfunktion⁺⁾ $\Phi(z, \alpha)$ der NAKANISHI-Darstellung (6) der Vierpunktfunktion $f_4(\underline{s})$, die asymptotisch das Verhalten $\beta(t)s^{\alpha(t)}$ für $s \rightarrow \infty$, t fest zeigen soll, in der Form einer unendlichen Reihe angeben:

$$\Phi(z, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(z, \alpha) \quad (38)$$

Die $\Phi(z, \alpha)$ sollen nun so gewählt werden, daß das führende asymptotische Verhalten des Summanden

⁺⁾ Der Index 4 an der Belegfunktion von (6), der auf "Vierpunktfunktion" hinweist, ist hier zur Vereinfachung weggelassen.

$$f_4(\underline{s})_n = \int_0^1 \underline{dz} \int_0^1 d\alpha \frac{\Phi_n(\underline{z}, \alpha)}{N} \quad (39)$$

dem eines Leitergraphen mit n Sprossen entspricht. Dies kann man mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \Phi_n(\underline{z}, \alpha) = & (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n \int_0^1 d\alpha_i \delta(z_s - \prod_{i=1}^n \alpha_i) \cdot \delta^{(n-1)}(\alpha - \alpha_n) \cdot \\ & \cdot \phi_n(z_t, z_a, z_b, z_c, z_d) \delta(z_u) \end{aligned} \quad (40)$$

erreichen, denn damit ist

$$\begin{aligned} f_4(\underline{s})_n = & (n-1)! \prod_{i=1}^n \int_0^1 d\alpha_i \int_0^1 dz_t dz_a dz_b dz_c dz_d \delta(1 - z_a - z_b - z_c - z_d - z_t) \cdot \\ & \cdot \frac{\phi_n}{N^n} \end{aligned} \quad (41)$$

mit

$$N = \prod_{i=1}^n \alpha_i s + z_t t + \sum_{i=a,b,c,d} z_i s_i - \alpha_n \equiv \prod_{i=1}^n \alpha_i s + A$$

Dieser Ausdruck verhält sich für $s \rightarrow \infty$ (d.h. $s \gg A$) wie $s^{-1}(\ln s)^{n-1}$, wie sich durch Anwendung von den Gleichungen 3.3.11 und 3.3.13 in [28] ergibt. Im folgenden ist α_n für alle n gleich gewählt: $\alpha_n = \alpha_R$ für alle n. Explizit liefert die Ausführung der α -Integrationen für den asymptotisch führenden Term

$$\begin{aligned} s^{-1}(\ln s)^{n-1} \frac{I_n}{(n-1)!} \text{ mit} \\ I_n = (n-2)! \int_0^1 dz_t dz_a dz_b dz_c dz_d \delta(1 - z_t - z_a - z_b - z_c - z_d) \frac{\phi_n}{A^{n-1}} \end{aligned} \quad (42)$$

Wenn es gelingt, ein ϕ_n anzugeben, das eine Faktorisierung $I_n = G^{n-1}$ ermöglicht (analog zu den Verhältnissen bei Leitergraphen in der FEYNMAN-Parameter-Darstellung Gl.3.3.14 in [28]), dann zeigt die Summe der führenden Teile der Summanden der Reihe Regge-Verhalten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^{-1}(\ln s)^{n-1} \frac{G^{n-1}}{(n-1)!} = s^{-1} e^{G \ln s} = s^{\alpha} \text{ mit } \alpha = G-1 \quad (43)$$

Demnach muß man im nächsten Schritt die Frage beantworten, wie ϕ_n aussehen muß, damit die Zerlegung $I_n = G^{n-1}$ möglich ist. Da diese Rechnung exemplarischen Charakter hat, soll ohne Diskussion über andere Möglichkeiten ein Ansatz für eine Form von ϕ_n angegeben werden, der die gewünschte Faktorisierung zuläßt. Analog zu Gl.3.3.14 in [28] lautet nach (42) die Forderung an ϕ_n :

$$G^{n-1} = (n-2)! \int_0^1 dz_t dz_a dz_b dz_c dz_d \delta(1-z_a-z_b-z_c-z_d) \frac{\phi_n}{A^{n-1}} \quad (44)$$

Der Ansatz

$$\begin{aligned} \phi_n = & \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_0^1 dz_j \int_0^1 dz'_j dz'_a dz'_b \dots dz'_d \delta(1-z'_j-z'_a-z'_b \dots z'_d) \phi(z'_j, z'_a, z'_b \dots z'_d) \right) \\ & \cdot \delta\left(z_t - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i z'_{ti}\right) \delta\left(z_a - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i z'_{ai}\right) \dots \delta\left(z_d - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i z'_{di}\right) \end{aligned} \quad (45)$$

führt, wie explizites Nachrechnen zeigt, auf die gewünschte Faktorisierung mit

$$G = \int_0^1 dz_t dz_a \dots dz_d \delta(1-z_t \dots z_d) \frac{\phi(z_t, z_a, \dots, z_d)}{z_t + z_a + \dots + z_d - x_R} \quad (46)$$

Das allgemeinere Reggeverhalten $\beta(t, s_a, \dots, s_d) s^\alpha(t, s_a, \dots, s_d)$ wird durch eine Zerlegung $I_n = \beta(t, s_a, \dots, s_d) \hat{G}^{n-1}$ erreicht, für die man ebenfalls geeignete ϕ_n angeben kann.

Die α -Integrationen im Ansatz (40) für ϕ_n können explizit durchgeführt werden:

$$(-1)^{n-1} (n-1)! \prod_{i=1}^n \int_0^1 d\alpha_i \delta\left(z_s - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) = (\ln z_s)^{n-1} \quad (47)$$

Zusammengefaßt bleibt dann als Ergebnis dieser Rechnung, daß eine NAKANISHI-Belegfunktion der Gestalt $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ mit

$$\Phi_n = (\ln z_s)^{n-1} \delta^{(n-1)}(x - x_R) \delta(z_u) \frac{1}{(n-1)!} \phi_n \quad (48)$$

und mit ϕ_n nach (45) eine Vierpunktfunktion mit Reggeverhalten ergeben kann. Es soll hier nicht auf die Frage eingegangen

werden, ob eine Mitnahme der asymptotisch nicht führenden Terme (vgl. die Diskussion in [28]) dieses Verhalten beeinträchtigt.

Interessant ist es zu überlegen, was man über die allgemeine Struktur einer solchen Belegfunktion sagen kann: Prinzipiell wird jede mögliche unendliche Summe von Belegfunktionen eine unendliche Summe von verallgemeinerten Funktionen (Distributionen) sein. Unproblematisch sind Distributionen, die in jedem Summanden gleichermaßen auftauchen und als gemeinsamer Faktor herausgezogen werden können. Schwieriger wird es, wenn die Distributionen vom Summationsindex abhängen, wie im obigen Fall $s^{(n-1)}(x - x_n)$. Man muß sich jeweils genau überlegen, welche Bedeutung einer solchen unendlichen Summe zukommt, da sie möglicherweise zunächst gar nicht definiert ist. Inwieweit man ohne Distributionen in den Belegfunktionen auskommt, wenn man ein bestimmtes asymptotisches Verhalten erreichen will, ist für das Reggeverhalten noch näher zu diskutieren. Es ist auf jeden Fall zunächst damit zu rechnen, daß eine unendliche Summe von Distributionen in einer Belegfunktion auftritt, wenn sie Reggeverhalten liefern soll. Ob eine solche Summation ausgeführt werden bzw. durch Summen von gewöhnlichen Funktionen ersetzt werden kann, ohne daß das Reggeverhalten verloren geht, ist nicht klar.

5. Anwendung der NAKANISHI-Darstellung bei der Diskussion des elektromagnetischen Formfaktors eines Hadrons

Zur Vereinfachung sei eine Welt betrachtet, in der neben dem Photon mit Spin 1 nur skalare Hadronen existieren. Die Photon-Hadron-Vertexfunktion Γ_μ wird durch die lorentzinvarianten Funktionen F und G beschrieben. Ist q der Impuls des Photons, $p - \frac{q}{2}$ der des Hadrons vor und $p + \frac{q}{2}$ der nach der Wechselwirkung, so ist der Zusammenhang zwischen Γ_μ , F und G wie folgt gegeben.

$$\Gamma_\mu(p+\frac{q}{2}, p-\frac{q}{2}) = 2p_\mu F(q^2, (p+\frac{q}{2})^2, (p-\frac{q}{2})^2) + q_\mu G(q^2, (p+\frac{q}{2})^2, (p-\frac{q}{2})^2) \quad (49)$$

Auf der Massenschale, d.h. für $(p+\frac{q}{2})^2 = (p-\frac{q}{2})^2 = m_{\text{Hadron}}^2$, genügt der Formfaktor F zur Beschreibung von Γ_μ . Die WARDidentität verknüpft Γ_μ mit dem Propagator des wechselwirkenden Hadrons:

$$q^\mu \Gamma_\mu = \Delta^{-1}((p+\frac{q}{2})^2) - \Delta^{-1}((p-\frac{q}{2})^2) \quad (50)$$

Andererseits ist

$$q^\mu \Gamma_\mu = 2p \cdot q F + q^2 G \quad (51)$$

Damit kann G eliminiert werden

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p+\frac{q}{2}, p-\frac{q}{2}) &= 2(p_\mu - q_\mu \frac{p \cdot q}{q^2}) F(q^2, (p+\frac{q}{2})^2, (p-\frac{q}{2})^2) \\ &\quad + \frac{q_\mu}{q^2} (\Delta^{-1}((p+\frac{q}{2})^2) - \Delta^{-1}((p-\frac{q}{2})^2)) \end{aligned} \quad (52)$$

Multiplikation mit $p^\mu - q^\mu \frac{p \cdot q}{q^2}$ führt zu

$$F(q^2, (p+\frac{q}{2})^2, (p-\frac{q}{2})^2) = \frac{p^\mu q^2 - q^\mu p \cdot q}{2(p \cdot q - (p \cdot q)^2)} \Gamma_\mu(p+\frac{q}{2}, p-\frac{q}{2}) \quad (53)$$

Wie in Abschnitt 3 gezeigt wurde, kann man die invarianten Funktionen F und G mit Hilfe von Integraldarstellungen, wie sie in Gl.(3) angegeben sind, beschreiben. Es ist wiederum leicht, Belegfunktionen anzugeben, die asymptotisch einem Potenzverhalten der Formfaktoren entsprechen.

Im Falle skalarer Hadronen ist die Vertexfunktion Γ_μ andererseits durch die folgende Integralgleichung mit der hadronischen off-shell-Vierpunktfunktion T verknüpft:

$$\Gamma_\mu(p+\frac{q}{2}, p-\frac{q}{2}) = 2p_\mu Z_1 + Z_1 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2k_\mu \Delta((k+\frac{q}{2})^2) \Delta((k-\frac{q}{2})^2) \cdot T(p, k, q) \quad (54)$$

Die Bezeichnung der Impulse entspricht dabei der in Abb.8.

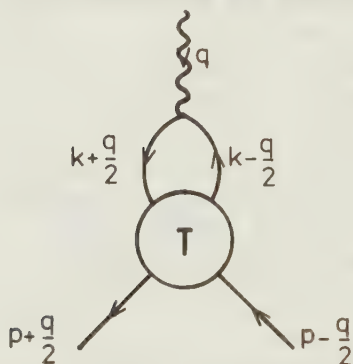


Abb.8 : Graph zur Beschreibung der Vertexfunktion Γ_μ durch die Vierpunktfunktion T .

Wenn Z_1 verschwindet^{*)}, hat die Integralgleichung (54) nur dann einen Sinn, wenn man durch eine Regularisierungsvorschrift festlegt, was unter dem Produkt von Z_1 und dem divergenten Integral zu verstehen ist. Für $Z_1=0$ muß das Integral divergieren, da die Vertexfunktion Γ_μ endlich ist. Mit der Abkürzung $M_{1,2}^2 = (p \pm \frac{q}{2})^2$ hat man für Propagator und Formfaktor F die aus (53) folgenden zu (54) analogen Gleichungen

$$\Delta^{-1}(M_1^2) - \Delta^{-1}(M_2^2) = 2p \cdot q Z_1 + Z_1 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2q \cdot k \Delta((k+\frac{q}{2})^2) \Delta((k-\frac{q}{2})^2) \cdot T(p, k, q) \quad (55)$$

^{*)} Das ist in einer renormierbaren (aber nicht superrenormierbaren) Theorie der Fall. Ferner findet man diese Vorstellung auch im Zusammenhang mit zusammengesetzten Teilchen.

$$F(q^2, M_1^2, M_2^2) = Z_1 + Z_1 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p q^2 - q(p \cdot q)}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \cdot k \Delta((k + \frac{q}{2})^2) \Delta((k - \frac{q}{2})^2) \cdot T(p, k, q) \quad (56)$$

$$\text{dabei ist } p \cdot q = \frac{M_1^2 - M_2^2}{2} \text{ und } p^2 = \frac{M_1^2 + M_2^2}{2} - \frac{q^2}{4}.$$

Da die Streuamplitude T in den Integralen (54), (55) und (56) mit keinem Bein auf der Massenschale liegt, bietet es sich geradezu an, sie für die weitere Auswertung in der Form der NAKANISHI-Darstellung (6) zu schreiben

$$T(p, k, q) = \frac{1}{\int_0^\infty \int_0^\infty} d \frac{\Phi(z, \infty)}{[N]} \quad (57)$$

$$\text{mit } [N] = k^2(z_a + z_b + z_t + z_u) + 2k \cdot [(z_a - z_b)\frac{q}{2} + (z_u - z_t)p] + z_c M_1^2 + z_d M_2^2 + (z_a + z_b)\frac{q^2}{4} + (z_t + z_u)p^2 - \infty.$$

Die Zuordnung der Impulse ist dabei so, daß den Impulsen p_a , p_b , p_c und p_d in (6) die Impulse $k + \frac{q}{2}$, $-k + \frac{q}{2}$, $-p - \frac{q}{2}$ und $p - \frac{q}{2}$ entsprechen. Die übliche Integraldarstellung (2) für den Propagator ist

$$\Delta(k^2) = \int_{\sigma_{\min}}^\infty \frac{g(\sigma)}{k^2 - \sigma} d\sigma \quad (58)$$

Ein Vertauschen der Integrationsreihenfolge in (56) gibt für den Formfaktor F dann das Integral

$$F(q^2, M_1^2, M_2^2) = Z_1 + Z_1 i \int_{\sigma_{\min}}^\infty g(\sigma_1) d\sigma_1 \int_{\sigma_{\min}}^\infty g(\sigma_2) d\sigma_2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha \Phi(z, \infty) \cdot \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p q^2 - q(p \cdot q)}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \cdot k \frac{1}{(k + \frac{q}{2})^2 - \sigma_1} \cdot \frac{1}{(k - \frac{q}{2})^2 - \sigma_2} \frac{1}{[N]} \quad (59)$$

Die Anwendung der FEYNMAN-Identität ist eine Möglichkeit, das LOOP-Integral in (59) weiter auszurechnen. Die Identität

$$\frac{1}{ABC} = r(3) \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3) \frac{1}{(\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C)^3} \quad (60)$$

führt mit der Zuordnung $A = (k + \frac{q}{2})^2 - \sigma_1$, $B = (k - \frac{q}{2})^2 - \sigma_2$ und $C = [N]$ zu einem Integral mit dem Nenner $(ak^2 + 2b \cdot k + c)^3$ mit

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 (z_a + z_b + z_t + z_u) = 1 - \alpha_3 (z_c + z_d + z_s) \\ b &= [\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 (z_a - z_b)] \frac{q}{2} + \alpha_3 (z_u - z_t) p \\ c &= \alpha_1 (\frac{q^2}{4} - \sigma_1) + \alpha_2 (\frac{q^2}{4} - \sigma_2) + \alpha_3 [z_c M_1^2 + z_d M_2^2 + (z_a + z_b) \frac{q^2}{4} + (z_t + z_u) p^2 - \varkappa] \end{aligned} \quad (61)$$

Man beachte, daß b ein Vierervektor ist. Es ist jetzt nicht schwer, die k -Integration nach der allgemeinen Formel

$$\int d^2 \omega k \frac{k_\mu}{(k^2 + 2k \cdot p + \ell)^\alpha} = \frac{i \pi^\omega}{(\ell - p^2)^{\alpha - \omega}} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)} (-p_\mu) \quad (62)$$

auszuführen [43]. Das Ergebnis ist

$$F(q^2, M_1^2, M_2^2) = Z_1 + Z_1 \int dF \frac{\alpha_3 (z_u - z_t)}{(q^2 H_1 + M_1^2 H_2 + M_2^2 H_3 + H_4)} \quad (63)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} H_1 &= (\alpha_1 + z_a \alpha_3) (\alpha_2 + z_b \alpha_3) + z_t z_u \alpha_3^2 \\ H_{2,3} &= \alpha_3 \{ (\alpha_1 + \alpha_2) (z_c, d + z_t, u) + \alpha_3 [z_c, d (z_a + z_b + z_t + z_u) + \\ &\quad + z_t z_a, b + z_u z_b, a + 2z_t z_u] \} \\ H_4 &= -a (\alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \varkappa) \end{aligned}$$

Dabei ist dF ... definiert durch

$$\begin{aligned} dF \dots &= \frac{1}{32\pi^2} \int_{\sigma_{\min}}^{\infty} d\sigma_1 \int_{\sigma_{\min}}^{\infty} d\sigma_2 g(\sigma_1) g(\sigma_2) \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3) \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^1 d\tilde{z} \int_0^1 d\varkappa \frac{\Phi(\tilde{z}, \varkappa)}{a^2} \dots \end{aligned} \quad (64)$$

Ganz analog verläuft die Rechnung, die von (55) zu der folgenden Beziehung führt:

$$\Delta^{-1}(M_1^2) - \Delta^{-1}(M_2^2) = Z_1(M_1^2 - M_2^2) + q^2 Z_1 \cdot f dF \frac{\alpha_1^{-\alpha_2 + \alpha_3} (z_a - z_b)}{(q^2 H_1 + M_1^2 H_2 + M_2^2 H_2 + H_4)} \quad (65)$$

Für den Formfaktor sei die übliche Normierung angenommen:

$$F(q^2=0, M_1^2=m^2, M_2^2=m^2) = 1$$

Die Renormierungskonstante ist dann nach (63) durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$Z_1^{-1} = 1 + f dF \frac{\alpha_3 (z_u - z_t)}{a^2 [m^2 (H_2 + H_3) + H_4]} \quad (66)$$

$$H_2 + H_3 = \alpha_3 [(z_c + z_d + z_t + z_u)^{\alpha_3} - (z_t - z_u)^{\alpha_3}]$$

Vergleicht man (63) mit einer Integraldarstellung der Form (3) für den Formfaktor F

$$F(q^2, M_1^2, M_2^2) = Z_1 \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_q \delta(1 - z_1 - z_2 - z_q) \int_0^\infty d\alpha \frac{\Phi_F(z_1, z_2, z_q, \alpha)}{z_1 M_1^2 + z_2 M_2^2 + z_q q^2 - \alpha} \quad (67)$$

bei der dieser durch die Belegfunktion Φ_F beschrieben wird, so ergibt sich der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \Phi_F(z_1, z_2, z_q, \alpha) = & \frac{Z_1}{32\pi^2} \int_{\sigma_{\min}}^{\infty} d\sigma_1 \int_{\sigma_{\min}}^{\infty} d\sigma_2 g(\sigma_1) g(\sigma_2) \\ & \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \cdot \\ & \cdot \int_0^1 dz \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\xi \Phi(z, \alpha) \delta(z_1 - \frac{1}{\xi} \alpha^2 H_2) \delta(z_2 - \frac{1}{\xi} \alpha^2 H_3) \cdot \\ & \cdot \delta(z_q - \frac{1}{\xi} \alpha^2 H_1) \delta(\alpha - \frac{1}{\xi} a(\alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \alpha)) \frac{\alpha_3 (z_u - z_t)}{\xi^2} \end{aligned} \quad (68)$$

Man erhält also anstelle (63) eine Integralgleichung für die Belegfunktionen.

Die jetzt gewonnenen Beziehungen stellen wie in Kapitel 4 angekündigt den Zusammenhang zwischen dem elektromagnetischen Formfaktor und der off-shell Vierpunktfunktion dar.

Das Experiment zeigt, daß Formfaktoren im nichtasymptotischen Bereich, d.h. für kleine Beträge von q^2 , M_1^2 und M_2^2 , in recht verwickelter Weise von diesen Variablen abhängen. Es treten Resonanzstrukturen auf. Die Belegfunktion $\varphi(z, \alpha)$ und die Spektralfunktion $g(\sigma)$ in (63) müssen diese Strukturen widerspiegeln, was sich sicher darin bemerkbar macht, daß sie sehr komplizierte (verallgemeinerte) Funktionen der Integrationsvariablen sind. Im asymptotischen Bereich kann die experimentelle Abhängigkeit der Formfaktoren von den kinematischen Invarianten durch Potenzgesetze beschrieben werden. Diese einfachen asymptotischen Eigenschaften von Formfaktoren lassen sich durch ebenfalls einfache Spektral- und Belegfunktionen wiedergeben, wie es auch bei der Beschreibung der Weitwinkelstreuung möglich war.

Ein vielfach verwendeter Ansatz [5,7,10,11,44] bei der Diskussion des asymptotischen Verhaltens von Formfaktoren und Vertexfunktionen ist die sogenannte Dreiecksnäherung (Abb.9). Für die Vertexfunktionen in den unteren beiden Ecken des Dreiecks wird häufig die DGS-Darstellung, wie es sich für den Fall $M_1^2 = M_2^2 = m^2$, d.h. den on-shell Formfaktor, sofort anbietet, eingesetzt. Entscheidend geht dann natürlich die Belegfunktion der DGS-Darstellung in die Rechnung ein. Im off-shell-Fall

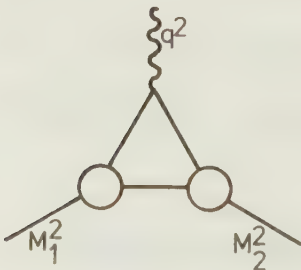


Abb.9 : Die Vertexfunktion in der Dreiecksnäherung

muß man an deren Stelle die Form (3) der allgemeineren NAKANISHI-Darstellung für die Dreipunktfunktion wählen.

Im folgenden soll der Zusammenhang zwischen den Rechnungen mit der Dreiecksnäherung unter Verwendung der DGS-Darstellung und den mit der Vierpunktfunktion nach (54) angegeben werden. Es ist dazu zu untersuchen, wie die Belegfunktion der NAKANISHI-Darstellung für die Vierpunktfunktion (57) mit der der DGS-Darstellung in der Dreiecksnäherung zusammenhängt. Mit den Bezeichnungen nach Abb.10 ist die Streuamplitude $T(\underline{s})$ in der Dreiecksnäherung mit

$$T_D = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{(p-k)^2 - \mu^2} \quad (69)$$

angesetzt, wobei μ die Masse des ausgetauschten Teilchens ist.

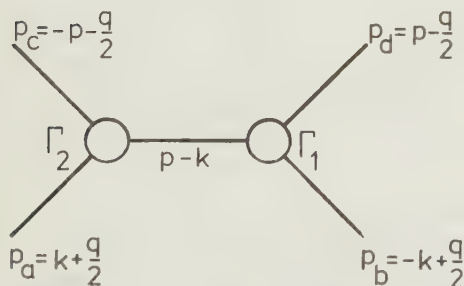


Abb.10 : Die Streuamplitude T in der Austauschnäherung

Für Γ_i , $i=1,2$ wird die DGS-Darstellung verwendet:

$$\Gamma_{1,2} = \int_0^\infty d\gamma_{1,2} \int_0^1 d\beta_{1,2} H(\beta_{1,2}, \gamma_{1,2}) \frac{1}{[(k+\frac{q}{2})^2 (1-\beta_{1,2}) + (p-k)^2 \beta_{1,2} - \gamma]^{n_{1,2}+1}} \quad (70)$$

Zum besseren Vergleich mit [7] wurde die Potenz des Nenners allgemeiner als in (3) angesetzt. Da die Spektralfunktion $H(\beta, \gamma)$ i.a. eine Distribution ist, ist dies natürlich immer möglich. Die Anwendung der FEYNMAN-Identität zur Zusammenfassung der Nenner in (69) liefert

$$T_D = \int_0^\infty d\gamma_1 \int_0^\infty d\gamma_2 \int_0^\infty d\beta_1 \int_0^\infty d\beta_2 H(\beta_1, \gamma_1) H(\beta_2, \gamma_2) \int_0^\infty d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \delta(1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3) \cdot \\ \cdot \frac{\Gamma(n_1+n_2+3)}{\Gamma(n_1+1)\Gamma(n_2+1)} \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} [p_a^2 \lambda_2 (1-\beta_2) + p_b^2 \lambda_1 (1-\beta_1) + t(\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3) - \lambda_1 \gamma_1 - \lambda_2 \gamma_2 - \lambda_3 \mu]^{-n_1-n_2-3} \quad (71)$$

Dabei ist $p_{a,b}^2 = (k \pm \frac{q}{2})^2$ und $t = (p-k)^2$. Der Vergleich mit der Darstellung (57) liefert

$$\varphi_D(z, \varkappa) = \left(-\frac{\partial}{\partial \varkappa}\right)^{n_1+n_2+2} \frac{\hat{\varphi}_D(z, \varkappa)}{(n_1+n_2+2)!} \quad (72)$$

$$\text{mit} \\ \hat{\varphi}_D(z, \varkappa) = \frac{\Gamma(n_1+n_2+3)}{\Gamma(n_1+1)\Gamma(n_2+1)} \delta(z_c) \delta(z_d) \delta(z_s) \delta(z_u) \\ \prod_{i=1}^2 \left(\int_0^\infty d\gamma_i \int_0^\infty d\beta_i H(\beta_i, \gamma_i) \right) \cdot (1-\beta_1)^{-n_1-1} (1-\beta_2)^{-n_2-1} z_a^{n_2} z_b^{n_1} \\ \cdot \theta\left(1 - \frac{z_a}{1-\beta_1} - \frac{z_b}{1-\beta_1}\right) \cdot \delta\left(\varkappa - \gamma_1 \frac{z_b}{1-\beta_1} - \gamma_2 \frac{z_a}{1-\beta_2} - \left(1 - \frac{z_a}{1-\beta_2} - \frac{z_b}{1-\beta_1}\right)\mu\right) \quad (73)$$

Mit Hilfe der Beziehung (73), die zugegeben nicht besonders einfach ist, lassen sich Überlegungen, die unter Zugrundelegung bestimmter Ansätze für die DGS-Belegfunktion angestellt wurden [7], auf die Rechnung mit der NAKANISHI-Darstellung übertragen. Dies sei an einem einfachen Beispiel gezeigt: Anstelle der in [7] angenommenen Konvergenzbedingung für die DGS-Belegfunktion sei hier vorausgesetzt, daß die γ -Abhängigkeit als $\delta(\gamma-\rho)$, ρ konstant, faktorisiert. Dies vereinfacht die Rechnung, ändert aber nichts an ihren wesentlichen Zügen. In der Dreiecksnäherung kann das Verhalten der Belegfunktion $H(\beta, \gamma)$ für $\beta \rightarrow 1$ das asymptotische Verhalten des on-shell Formfaktors für $|q^2| \rightarrow \infty$ wesentlich bestimmen [7]. Ein Ansatz $H_i(\beta, \gamma) \sim \delta(\gamma-\rho)(1-\beta)^{p_i}$ $i=1,2$, bietet sich an. Die Ansätze $\delta^{(m)}(\gamma-\rho)(1-\beta)^p$ werden mit erfaßt, da ein $m \neq 0$ durch partielle Integration in die Potenz n des Nenners der DGS-Darstellung (70) gesteckt werden kann.

Diese Vereinfachung erlaubt es, $\hat{\Phi}_D(z, \varkappa)$ explizit anzugeben, da sämtliche verbleibenden Integrationen in (73) durchgeführt werden können:

$$\begin{aligned} \Phi_D(z, \varkappa) = & \text{const.} \cdot \frac{\Gamma(n_1+n_2+3)}{\Gamma(n_1+1)\Gamma(n_2+1)} \delta(z_c) \delta(z_d) \delta(z_s) \delta(z_u) \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\rho-\mu}{\varkappa-\mu} \right)^2 z_a^{p_1+p_2-n_1-n_2} z_a^{p_2} z_b^{p_1} \theta(\rho-\varkappa) \cdot \\ & \cdot \theta(\varkappa-m^2-(z_a+z_b)(\rho-\mu^2)) \cdot \left[B_{y_2}(n_1-p_1, n_2-p_2) \right. \\ & \quad \left. - B_{y_1}(n_1-p_1, n_2-p_2) \right] \end{aligned} \quad (74)$$

Dabei ist

$$B_x(a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad y_1 = \frac{\rho-\mu}{\varkappa-\mu} z_b, \quad y_2 = 1 - \frac{\rho-\mu}{\varkappa-\mu} z_a \quad (75)$$

Wie das asymptotische Verhalten des Formfaktors durch diese Belegfunktion bestimmt wird, zeigt folgende Betrachtung: In (63) tritt die Variablenkombination H_1 zusammen mit q^2 im Nenner auf. Mit (74) kommt man auf

$$H_1 = (\alpha_1 + z_a \alpha_3) (\alpha_2 + z_b \alpha_3) \quad (76)$$

Wesentlich ist das Verhalten von $\Phi_D(z, \varkappa)$ für $z_a \rightarrow 0$, z_b fest und $z_b \rightarrow 0$, z_a fest (vgl. 3.4.9 in [28]). Dieses läßt sich, beachtet man nur genau die Eigenschaften der Betafunktion $B_x(a, b)$, schnell ermitteln. $\Phi_D(z, \varkappa)$ verhält sich in den entscheidenden Bereichen wie

$$z_a^{q_a} z_b^{q_b} \quad \text{mit} \quad q_{a,b} = \min(n_{1,2}, p_{1,2}).$$

Wie dann das Verhalten für $|q^2| \rightarrow \infty$ des on-shell Formfaktors für diesen Ansatz für die Belegfunktionen der DGS-Darstellung zu diskutieren ist, kann man [7] entnehmen.

Ich danke Herrn Prof. Dr. W. Kerler für sein Interesse an der Durchführung dieser Arbeit.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Kogut, L. Susskind, Phys.Rep. 8, 75-172 (1973)
- [2] D. Sivers, S.J. Brodsky, R. Blankenbecler,
Phys.Rep. 23, 1-121 (1976)
- [3] V. Matvev, R. Muradyan, A. Tavkhelidze,
Nuovo Cimento Lett. 7, 719 (1973)
- [4] S.J. Brodsky, G.R. Farrar, Phys.Rev. D11, 1309 (1975)
- [5] S.J. Brodsky, G.R. Farrar, Phys.Rev.Lett. 31, 1153 (1973)
- [6] R. Blankenbecler, S.J. Brodsky, Phys.Rev. D10, 2973 (1974)
- [7] P.M. Fishbane, I.J. Muzinich, Phys.Rev. D8, 4015 (1973)
- [8] S. Deser, W. Gilbert, E.C.G. Sudarshan,
Phys.Rev. 115, 731 (1959)
M. Ida, Progr.Theoret.Phys. 23, 1151 (1960)
- [9] P. Menotti, Phys.Rev. D11, 2828 (1975)
- [10] M. Ciafaloni, P. Menotti, Nucl.Phys. B54, 483-508 (1973)
- [11] T. Appelquist, E. Poggio, Phys.Rev. D10, 3280 (1974)
- [12] R. Blankenbecler, S.J. Brodsky, J.F. Gunion, R. Savit,
Phys.Rev. D8, 4117 (1973)
- [13] N. Nakanishi, Graph Theory and Feynman Integrals,
Gordon and Breach (1971)
- [14] H. Umezawa, S. Kamefuchi, Progr.Theoret.Phys. 6, 543 (1951)
- [15] G. Källén, Helv.Phys.Acta 25, 435 (1952)

- [16] H. Lehmann, Nuovo Cim. 11, 342 (1954)
- [17] M. Gell-Mann, F.E. Low, Phys.Rev. 95, 1300 (1954)
- [18] N. Nakanishi, Phys.Rev. 126, 1225 (1962)
- [19] S. Mandelstam, Phys.Rev. 112, 1344 (1958)
- [20] Y. Nambu, Phys.Rev. 100, 394 (1955)
- [21] N. Nakanishi, Progr.Theoret.Phys. 24, 1275 (1960)
- [22] N. Nakanishi, Progr.Theoret.Phys. 26, 337 (1961)
- [23] N. Nakanishi, Progr.Theoret.Phys. 26, 927 (1961)
- [24] N. Nakanishi, J.Math.Phys. 3, 1139 (1962)
- [25] N. Nakanishi, Phys.Rev. 127, 1380 (1962)
- [26] N. Nakanishi, J.Math.Phys. 4, 1385 (1963)
- [27] N. Nakanishi, M.Math.Phys. 5, 1458 (1964)
- [28] R.J. Eden, P.V. Landshoff, D.I. Olive, J.C. Polkinghorne,
The Analytic S-Matrix (Cambridge University Press, London,
1966)
- [29] §25 von [13]
- [30] A.C.T. Wu, Mat.Fys.Medd.Vid.Selsk. 33, No.3 (1961)
- [31] N. Nakanishi, Progr.Theoret.Phys.Suppl. 18, 1 (1961)
- [32] vgl. Anhang B2 von [13]

- [33] Liu I-Chen, I.T. Todorov, Sov.Phys.Dokl. 8, 157 (1963)
- [34] E.R. Speer, J. Math.Phys. 9, 1404 (1968)
- [35] T. Appelquist, Ann.Phys.(N.Y.) 54, 27-61 (1961)
- [36] J.M. Cornwall, D. Corrigan, R.E. Norton,
Phys.Rev. D3, 536 (1970)
- [37] J.M. Cornwall, R.E. Norton, Phys.Rev. 173, 1637 (1968)
- [38] [28] ab S.132
J.C. Polkinghorne, J.Math.Phys. 4, 503,1396 (1963);
Nuovo Cim. 36, 857 (1965)
P.G. Federbush, M.T. Grisarn, Ann.Phys.(N.Y.) 22, 263, 299
(1963)
I.G. Halliday, Nuovo Cim. 30, 177 (1963)
Ann.Phys.(N.Y.) 28, 320 (1964)
I.G. Halliday, J.C. Polkinghorne, Phys.Rev. 132, 2741 (1963)
G. Tiktopoulos, Phys.Rev. 131, 480, 2373 (1963)
J.V. Greenman, J.Math.Phys. 6, 660 (1965)
B. Hambrecht, Nuovo Cim. 40, 542 (1965)
M.M. Menke, Nuovo Cim. 34, 351 (1964)
J.D. Bjorten, T.T. Wu, Phys.Rev. 130, 2566 (1963)
M. Martinis, J.Math.Phys. 6, 136 (1963)
C.S. Lam, Nuovo Cim. 62A, 97 (1969)
P.D.B. Collins, E.J. Squires, Springer Tracts in Mod.Phys.
ab S.178
- [13] ab S.196
- [39] vgl. Gleichung 3.4.9 in [28]
- [40] I.M. Gelfand, G.E. Schilow, Verallgemeinerte Funktionen I
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
(1960)
und Gleichungen (A-9) und (A-10) in [13].

- [41] N. Nakanishi, Phys.Rev. 137B, 1352 (1965)
- [42] [28] ab S.131 und Zitate in [28]
- [43] G. t'Hooft, M. Veltman, Nucl.Phys. B44, 189 (1972)
- [44] S. Mandelstam, Proc.Roy.Soc.(London) A233, 248 (1955)
K. Nishijima, Progr.Theoret.Phys. 13, 305 (1955)
D. Amati, R. Jengo, H.R. Rubinstein, G. Veneziano,
M.A. Virasoro, Phys.Lett. 27B, 38 (1968)
J.S. Ball, F. Zachariasen, Phys.Rev. 173, 1541 (1968)
M. Ciafaloni, P. Menotti, Nuovo Cim. 46A, 162 (1966)
Phys.Rev. 173, 1575 (1968)
Phys.Rev. 176, 1898 (1968)
Nucl.Phys. B54, 483 (1973)
Nuovo Cim.Lett. 6, 545 (1973)
D. Amati, L. Caneschi, R. Jengo, Nuovo Cim. 58A, 783 (1968)
T. Appelquist, J.R. Primack, Phys.Rev. D1, 1144 (1969)
J. Sucher, C.H. Woo, Phys.Rev. D7, 3373 (1973)

LEBENS LAUF

- Persönliches : Geboren am 6. Mai 1947 als Sohn des Friedrich Heck und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Metzger, in Marburg/Lahn. Seit 1973 verheiratet mit Dominique Heck-Anselme, geb. Anselme.
Ein Sohn: Simon, Lionel, geboren 7.5.1977
- Schulbildung : 1953-1957 Friedrich-Ebert-Volksschule
1957-1959 Friedrich-Ebert-Mittelschule
1959-1966 Martin-Luther-Schule
in Marburg
16.2.1966 Abitur
- Bundeswehr : 1966-1968
- Studium : 1968-1973 Studium der Physik an der
Philipps-Universität Marburg
22.4.1970 Vordiplom
19.6.1973 Diplom
anschließend Dissertation am Fachbereich
Physik der Philipps-Universität Marburg

